Řešení úloh Fyziklání Online 2024

FyziklaniOnline

Úloha 1 ... férový sprint

3 body

Na letošní olympiádě v Paříži vyhrál sprint mužů na $100\,\mathrm{m}$ *v čase* $9{,}784\,\mathrm{s}$ *Američan Noah Lyles, druhý skončil o pět tisícin sekundy za ním Jamajčan Kishane Thompson. Lyles běžel na dráze číslo 7, Thompson na dráze 4. Běžci startují na výstřel. Aby jej všichni slyšeli ve stejný okamžik, má každý sprinter těsně za svými startovacími bloky reproduktor, ze kterého zvuk výstřelu vychází. Kdyby ale startovali na výstřel z pistole, která by se nacházela poblíž dráhy 1 na úrovni startu, o jaký čas by vyhrál Thompson? Šířka dráhy je* $1{,}22\,\mathrm{m}$*.*

Jarda si myslel, že vyhrál Forrest Gump.

Rychlost zvuku je $343\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, vzájemná vzdálenost levých uch obou běžců je $3\cdot 1{,}22\,\mathrm{m} = 3{,}66\,\mathrm{m}$. Z toho dostaneme časový rozdíl

$$\Delta t = \frac{3{,}66\,\mathrm{m}}{343\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} \doteq 0{,}0107\,\mathrm{s}\,.$$

Jamajčan by tak výstřel slyšel asi o setinu sekundy dříve než Lyles, proto by dříve vystartoval a doběhl by do cíle jako první. Vyhrál by o

$$\Delta t_{\mathrm{win}} = 0{,}0107\,\mathrm{s} - 0{,}005\,\mathrm{s} \doteq 0{,}006\,\mathrm{s}\,,$$

kde jsme odečetli čas $0{,}005\,\mathrm{s}$ zmíněný v zadání. Závod by tedy dopadl podobně, jen s opačným výsledkem.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 2 ... kolejová

3 body

Pro pohodlnější jízdu vlakem se používá technologie bezstykových kolejí, *která spočívá ve svařování kolejnic a vytváření stejnorodého povrchu pro průjezd vlaku. Taková kolej však musí vydržet teplotní rozpínání v létě i v zimě. Jak velký teplotní rozdíl ocelová kolejnice vydrží, pokud je její koeficient teplotní délkové roztažnosti* $1{,}63\cdot 10^{-5}\,\mathrm{K^{-1}}$ *a povolené napětí kolejnice* $600\,\mathrm{MPa}$*? Uvažujte, že ocel má Youngův modul pružnosti v tahu* $195\,\mathrm{GPa}$*.*

David jel na koleje vlakem.

Ke zjištění, jak velký teplotní rozdíl kolejnice vydrží, využijeme Hookův zákon. Ten nám říká, že normálové napětí σ je přímo úměrné relativnímu prodloužení ε přes Youngův modul pružnosti v tahu E

$$\sigma = E\varepsilon\,.$$

Relativní prodloužení je definováno jako poměr změny délky Δl k původní délce l_0

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}\,.$$

Dále už zbývá jen zjistit, jak by se kolejnice prodloužila při změně teploty o Δt. Ve skutečnosti se kolejnice neprodlužuje a její délka je konstantní, v důsledku čehož vzniká v kolejnici napětí, které vychází ze stejných vztahů. Prodloužení získáme pomocí vztahu

$$\Delta l = l_0\alpha\Delta t\,,$$

kde α je koeficient teplotní délkové roztažnosti. Z toho dostáváme, že teplotní rozdíl Δt_m, při kterém kolejnice překročí dovolené napětí σ_m, je dáno vzorcem

$$\Delta t_\mathrm{m} = \frac{\sigma_\mathrm{m}}{E\alpha}\,.$$

Po dosazení dostaneme, že $\Delta t_\mathrm{m} \doteq 189\,\mathrm{K}$. Abychom si obhájili použité rovnice, můžeme si situaci představit i tak, že se kolejnice prodlouží, ale pak ji stlačíme zpět na původní velikost. V praxi se nám koleje začnou ohýbat už i při nižších teplotách, zejména na to má vliv tvar kolejnic a váha vlaků, které na kolejnice působí.

David Ševčík
`david.sevcik@fykos.cz`

Úloha 3 ... in the shadows — 3 body

Uvažujme lampu o výšce $H = 3{,}2\,\mathrm{m}$ jako bodový zdroj světla. Člověk s výškou $h = 1{,}8\,\mathrm{m}$ se pohybuje od lampy po přímce rovnoměrnou rychlostí $v = 1{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete zrychlení vrcholu jeho stínu. *Marek žije ve stínech.*

Označme H výšku lampy a h výšku člověka. Vzdálenost člověka od lampy je s a x délka jeho stínu na zemi. Dále označme počáteční vzdálenost člověka od lampy jako s_0. Poté z podobnosti trojúhelníků plyne

$$\frac{s + x}{H} = \frac{x}{h} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{sh}{H - h}\,.$$

Vzdálenost člověka od lampy se mění v čase jako $s = vt + s_0$, dostáváme tedy

$$x = \frac{h(vt + s_0)}{H - h} = \frac{hv}{H - h}t + \frac{hs_0}{H - h}\,.$$

Vidíme, že špička stínu koná rovnoměrný přímočarý pohyb, jehož zrychlení je nulové.

Jakub Koňárek
`jakub.konarek@fykos.cz`

Úloha 4 ... běž, co ti nohy stačí — 3 body

Pilot stíhacího letadla Mitsubishi A6M Zero s výkonem $P = 940\,\mathrm{hp}$ letěl horizontálně nad atolem patřícím Spojeným státům americkým rychlostí $v = 180\,\mathrm{kn}$. Když pilot spatřil přistávací dráhu s letadly pokoušejícími se vzlétnout, stlačil spouště obou $7{,}7\,\mathrm{mm}$ pevně instalovaných leteckých kulometů typu 97 s kadencí $c = 900\,\mathrm{min^{-1}}$ a ústťovou rychlostí $u = 745\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Každý z kulometů disponoval plným nábojovým pásem s 500 náboji. Jestliže pilot letěl přesně nad dráhou dlouhou $l = 7\,800\,\mathrm{ft}$, kolika náboji ji zasáhl? *Dodo sledoval válečný film.*

Keďže lietadlo letí horizontálne, v konštantnej výške ponad dráhu, trajektórie projektilov budú pretínať dráhu v rovnakých intervaloch vzdialenosti, v akých budú opúšťať hlaveň. Doba za ktorú Zero preletí ponad dráhu je

$$t = \frac{s}{v} = \frac{7\,800\,\mathrm{ft}}{180\,\mathrm{kn}} = \frac{2\,377\,\mathrm{m}}{92{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} = 25{,}67\,\mathrm{s}\,.$$

Guľomet môže bez prestania strieľať maximálne $500/900\,\mathrm{min} = 33{,}3\,\mathrm{s}$. Má teda dosť nábojov, aby bol schopný ostrieľať celú dráhu. Na dráhu teda z jedného guľometu dopadne celkom

$$N = 25{,}67\,\mathrm{s} \cdot 900\,\mathrm{min}^{-1} = 385\,\text{nábojov}\,.$$

Guľomety sú však dva, hľadaná odpoveď je teda $N \doteq 770$.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha 5 ... vodohospodářské inženýrství 3 body

Vodou se má šetřit, a proto sbíráme dešťovou vodu do sudu. Do něj ústí vodorovný okapový vývod ze svislé roury, která vodu svádí ze střechy. Když se však sud naplní, voda zbytečně přetéká do okolní zahrádky. Tehdy bychom proto rádi okapový vývod zavřeli, aby voda jen volně padala rourou dolů, místo aby do sudu dál přitékala. Verčin taťka je inženýr (stejně jako jednou bude ona) a na řešení tohoto problému vyrobil důmyslné zařízení. Na hladině v sudu plave plastový válec o obsahu podstavy $S = 100\,\mathrm{cm}^2$ a hustotě $\rho = 550\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, pevnou tyčí připevněný k okapovému vývodu. Když tedy hladina vystoupá dostatečně vysoko, vytlačí válec, a ten pomocí zmíněné tyče vývod zavře. Jakou minimální výšku musí válec mít, aby na něj vztlaková síla vody působila dostatečně silně pro zavření vývodu, a zároveň aby měl dostatečnou hmotnost pro opětovné otevření vývodu, když hladina zase klesne? Uvažujte, že aby byl válec schopný manipulovat s vývodem, musí na něj vždy působit síla alespoň $F = 15\,\mathrm{N}$ (pro uzavření vývodu směrem vzhůru, pro otevření směrem dolů), jinak se díky pevnému spojení nebude soustava válec-vývod vůbec pohybovat. *Verča sledovala taťku při práci.*

Rozepíšeme si podmínky pro oba případy (otevírání a zavírání vývodu).

Při otevírání potřebujeme

$$F < Sh\rho g\,,$$

kde h je výška válce.

Při zavírání musíme splnit podmínku

$$F < Shg(\rho_\mathrm{v} - \rho)\,,$$

kde $\rho_\mathrm{v} = 998\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ je hustota vody a $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ je tíhové zrychlení. Vidíme, že v obou případech je působící síla přímo úměrná výšce válečku, stačí tedy určit, ve kterém případě je h větší a to bude nezbytná minimální výška. Po vyjádření z obou podmínek dostáváme

$$h_1 > 27{,}8\,\mathrm{cm}\,,$$
$$h_2 > 34{,}1\,\mathrm{cm}\,.$$

Odtud vidíme, že minimální výška válečku o zadaných parametrech je $34{,}1\,\mathrm{cm}$.

Radovan Lev
`radovan.lev@fykos.cz`

Úloha 6 ... vaříme kyselinu

4 body

Jakou nejmenší hmotnost kyseliny sírové H_2SO_4 musíme smísit s 200 ml čisté vody, aby se směs dostala na teplotu varu, která je v laboratoři 98 °C? Původní teplota obou kapalin je 25 °C. Při mísení se uvolňuje 70,5 kJ tepla na mol dodané kyseliny sírové.

Počítejte s měrnou tepelnou kapacitou výsledného roztoku $0{,}75\,\mathrm{cal{\cdot}g^{-1}{\cdot}{}^\circ C^{-1}}$ nezávislou na vnějších podmínkách a s molárními hmotnostmi vodíku $1{,}01\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$, kyslíku $16{,}00\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$ a síry $32{,}07\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$. Uvažujte, že celá reakce proběhne rychle a za normálních podmínek. Zanedbejte tepelnou kapacitu nádoby a tepelné ztráty. Dále uvažujte zjednodušený případ, kdy je množství uvolněného tepla na mol dodané kyseliny konstantní až do té chvíle, kdy poměr látkového množství kyseliny ku látkovému množství vody přesáhne 0,1. Tehdy začne množství produkovaného tepla s dalším přiléváním kyseliny výrazně klesat, a proto uvažujte, že směs v tomto případě bodu varu nedosáhne. Pokud by to nastalo, udejte do výsledku 0 g.

Karel přemýšlel, proč je to mísení tak nebezpečné.

Celkové uvoľnené teplo Q určíme ako

$$Q = n_{\mathrm{H_2SO_4}} Q_\mathrm{m} = \frac{m_{\mathrm{H_2SO_4}}}{M_{\mathrm{H_2SO_4}}} Q_\mathrm{m}\,,$$

kde $n_{\mathrm{H_2SO_4}}$ je látkové množstvo $\mathrm{H_2SO_4}$, ktoré sme vyjadrili pomocou pomeru jej hmotnosti $m_{\mathrm{H_2SO_4}}$ k jej molárnej hmotnosti $M_{\mathrm{H_2SO_4}}$; a Q_m je molárne teplo uvoľnené pri zrieďovaní $\mathrm{H_2SO_4}$. Molárna hmotnosť molekuly je súčtom molárnych hmotností všetkých atómov v nej, preto platí

$$M_{\mathrm{H_2SO_4}} = 2M_\mathrm{H} + M_\mathrm{S} + 4M_\mathrm{O}$$

pre molárne hmotnosti vodíka M_H, síry M_S a kyslíka M_O dané zo zadania.

Všetko teplo Q sa podľa predpokladov a zákonu zachovania energie spotrebuje na ohrev roztoku, potom vďaka zákonu zachovania hmotnosti bude platiť

$$Q = \left(m_{\mathrm{H_2SO_4}} + m_{\mathrm{H_2O}}\right) c\,(t_\mathrm{v} - t_0) = \left(m_{\mathrm{H_2SO_4}} + \rho_{\mathrm{H_2O}} V_{\mathrm{H_2O}}\right) c\,(t_\mathrm{v} - t_0)$$

pre hmotnosť vody $m_{\mathrm{H_2O}}$ vyjadrenú pomocou jej objemu $V_{\mathrm{H_2O}}$ a hustoty $\rho_{\mathrm{H_2O}} = 0{,}998\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$, mernú tepelnú kapacitu roztoku $c = 3{,}138\,\mathrm{J{\cdot}g^{-1}{\cdot}{}^\circ C^{-1}}$, teplotu varu zmesi t_v a jej počiatočnú teplotu t_0. Z rovnosti tepiel ostáva vyjadriť hľadanú hmotnosť $\mathrm{H_2SO_4}$, dosadiť hodnoty zo zadania a konštantovníku, čím dostávame výsledok

$$m_{\mathrm{H_2SO_4}} = \frac{\rho_{\mathrm{H_2O}} V_{\mathrm{H_2O}} c\,(t_\mathrm{v} - t_0)}{\frac{Q_\mathrm{m}}{2M_\mathrm{H} + M_\mathrm{S} + 4M_\mathrm{O}} - c\,(t_\mathrm{v} - t_0)} \doteq 93\,\mathrm{g}\,.$$

Na záver ešte overíme podmienku zo zadania. Pre pomer p látkového množstva kyseliny $n_{\mathrm{H_2SO_4}}$ a látkového množstva vody $n_{\mathrm{H_2O}}$ platí

$$p = \frac{n_{\mathrm{H_2SO_4}}}{n_{\mathrm{H_2O}}} = \frac{m_{\mathrm{H_2SO_4}} M_{\mathrm{H_2O}}}{m_{\mathrm{H_2O}} M_{\mathrm{H_2SO_4}}} = \frac{m_{\mathrm{H_2SO_4}}\,(2M_\mathrm{H} + M_\mathrm{O})}{\rho_{\mathrm{H_2O}} V_{\mathrm{H_2O}}\,(2M_\mathrm{H} + M_\mathrm{S} + 4M_\mathrm{O})} \doteq 0{,}09 < 0{,}1\,,$$

a tým pádom je vyššie vypočítané riešnie platné.

Patrik Stercz
`patrik.stercz@fykos.cz`

Úloha 7 ... pozorování letadla

3 body

Martin se dívá z okna a vidí letět letadlo. Přemýšlí, jak rychle by tak mohlo letět. V duchu napočítá, že letadlo bylo v jeho zorném poli mezi domy 10 sekund (letadlo je v zorném poli, pokud Martin vidí alespoň polovinu letadla). A dle poučky „1 palec ve vzdálenosti natažené ruky odpovídá $2,5$ *úhlovým stupňům“ spočítá, že letadlo za tuto dobu přeletělo* $7,5$ *jeho „palců“. Martin netuší, jak daleko letadlo letělo, ale odhadne, že v jeho zorném poli zabíralo během celého pozorování polovinu jeho palce a že se mohlo jednat o Boeing 737-800. Spočítejte, jak rychle letadlo letělo, na základě údajů, které Martin odhadl.* *Martin se díval z Verčina okna.*

Pojďme si nejprve zopakovat, které veličiny známe:

- Čas pozorování letadla: $t = 10\,\mathrm{s}$
- Úhlová vzdálenost přeletu: $7{,}5\,\text{palců} \cdot 2{,}5\,^\circ$ na palec $= 18{,}75\,^\circ$
- Úhlová velikost letadla: $0{,}5\,\text{palce} \cdot 2{,}5\,^\circ$ na palec $= 1{,}25\,^\circ$

Neznáme vzdálenost letadla, abychom spočítali dráhu jeho letu za pomoci úhlu, který uletělo. Můžeme ji ale snadno vypočítat, pokud si vyhledáme, jakou délku má Boeing 737-800, což je $l = 39{,}5\,\mathrm{m}$. Dráha letadla s je pak z trojčlenky

$$s = \frac{18{,}75\,^\circ}{1{,}25\,^\circ} \cdot 39{,}5\,\mathrm{m} = 592{,}5\,\mathrm{m}\,.$$

Rychlost pak spočítáme triviálně jako

$$v = \frac{s}{t} = \frac{592{,}5\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{s}} = 59{,}25\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 213{,}3\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}\,.$$

Letadlo by tedy dle našich odhadů letělo asi $213\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. To je mnohem méně než maximální rychlost Boeingu 737-800, která je kolem $950\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Uvážíme-li však, že Martin v zadání opomněl fakt, že letadlo pozoroval při přistávání, pak se jedná o stále nepřesný, ale, vzhledem k použitým nástrojům (palec), poměrně rozumný řádový odhad (letadla běžně přistávají v rychlostech kolem $250\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ – $300\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$).

Martin Vaněk
`martin.vanek@fykos.cz`

Úloha 8 ... formule na stropě

4 body

Aby byla třecí síla mezi koly aut Formule 1 a povrchem vozovky co největší, je karoserie vozu navržena tak, aby odpor vzduchu přitlačoval auto k zemi. Jakou rychlostí by formule musely jezdit, aby se mohly udržet hlavou dolů na stropě? Zjednodušeně uvažujme, že vůz má z boku tvar pravoúhlého trojúhelníku o délce $5{,}1\,\mathrm{m}$, *výšce* $1{,}0\,\mathrm{m}$ *a je široký* $1{,}8\,\mathrm{m}$. *Hmotnost vozidla i s řidičem je* $800\,\mathrm{kg}$. *Dále předpokládejme, že částice vzduchu jsou na počátku nehybné a elasticky se od vozidla odráží.* *Jarda chtěl objet zácpu v tunelu.*

Na situaci se podíváme z inerciální vztažné soustavy spojené s formulí. V této soustavě se molekuly vzduchu pohybují rychlostí v proti formuli. Protože se jedná o elastickou srážku a protože je hmotnost formule mnohem vyšší než molekul vzduchu, můžeme předpokládat, že pro narážející molekuly platí, že je úhel odrazu roven úhlu dopadu, označme jej α. Protože se navíc molekuly pohybují po přímce rovnoběžné se stropem, můžeme tento úhel určit z tvaru formule (tedy pravoúhlého trojúhelníku) jako

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{h}{d} \doteq 11{,}3\,^\circ\,,$$

kde $h = 1{,}0\,\mathrm{m}$ značí výšku pravoúhlého trojúhelníku a $d = 5{,}1\,\mathrm{m}$ jeho délku.

Po srážce budou mít molekuly stejnou rychlost, ale od původního směru budou odchýleny o úhel 2α (úhel dopadu + odrazu). Pro jejich hybnost ve směru kolmém na strop tedy platí

$$p_y = mv \sin 2\alpha \,.$$

Ze zákona zachování hybnosti platí, že tato hybnost je rovna hybnosti, kterou při srážce předají v tomto směru formuli. Pro celkovou hybnost v závislosti na čase potřebujeme do vztahu výše dosadit hmotnost všech molekul, s nimiž se formule srazí za čas $\mathrm{d}t$. Uvažujme proto kvádr o stranách délky $s = 1{,}8\,\mathrm{m}$ (šířka formule), h a $v\,\mathrm{d}t$, kde $v\,\mathrm{d}t$ je rovno vzdálenosti, kterou urazí formule za čas $\mathrm{d}t$. Pro hmotnost potom platí

$$\mathrm{d}m = vsh\rho\,\mathrm{d}t \,,$$

kde ρ značí hustotu vzduchu. Dosazením do vztahu pro hybnost dostaneme

$$\mathrm{d}p_y = v \sin 2\alpha\,\mathrm{d}m \,,$$
$$\mathrm{d}p_y = shv^2\rho \sin 2\alpha\,\mathrm{d}t \,.$$

Nakonec, pro vztah mezi hybností a silou působící směrem vzhůru na vozidlo platí

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \,,$$

odkud

$$F_y = shv^2\rho \sin 2\alpha \,.$$

Tato síla musí vyrovnat tíhovou sílu Mg, která působí na formuli

$$Mg = shv^2\rho \sin 2\alpha \,,$$

kde M značí hmotnost formule.

Úpravou dostaneme

$$v = \sqrt{\frac{Mg}{sh\rho \sin 2\alpha}} \doteq 98\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \,.$$

Radovan Lev
radovan.lev@fykos.cz

Úloha 9 ... zahříváme plech kyvadlem — 4 body

Indukované proudy ve vodiči si můžeme demonstrovat experimentem, při kterém pod rozkývané kyvadlo z magnetu a provázku dáme kovový plech a kmitání se rychle utlumí. O kolik stupňů se zahřeje takový plech? Použili jsme hliníkový plech o šířce i délce $a = 12\,\mathrm{cm}$, *tloušťce* $d = 0{,}42\,\mathrm{mm}$ *s měrnou tepelnou kapacitou* $c_{\mathrm{Al}} = 896\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$. *Závěs kyvadla měl délku* $l = 84\,\mathrm{cm}$, *maximální výchylku* $\alpha = 33^\circ$ *a hmotnost závaží byla* $m = 120\,\mathrm{g}$. *Uvažujme, že se polovina energie kyvadla přeměnila v teplo, které přijal plech, a druhá polovina se rozptýlila jinými způsoby. Teplo se v plechu rozdělilo rovnoměrně. Hmotnost provázku a rozměry magnetu zanedbejte. Hustota hliníku je* $\rho_{\mathrm{Al}} = 2\,700\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

Karel viděl fotku demonstračního experimentu v učebnici.

Počáteční energie kyvadla je rovna jeho potenciální energii, kterou spočítáme jako

$$E_\mathrm{p} = mgl\left(1-\cos\alpha\right) \,.$$

Polovina této energie se využije na zahřátí plechu podle rovnice

$$Q = a^2 d c_\mathrm{Al} \rho_\mathrm{Al} \Delta T \,,$$

kde ΔT je rozdíl výsledné a počáteční teploty a $\rho_\mathrm{Al} = 2\,700\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ je hustota hliníku. Úpravou dostaneme

$$\frac{1}{2} mgl\left(1-\cos\alpha\right) = a^2 d c_\mathrm{Al} \rho_\mathrm{Al} \Delta T \,,$$

$$\Delta T = \frac{mgl(1-\cos\alpha)}{2a^2 d c_{Al} \rho_{Al}} \,,$$

$$\Delta T = 5{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K} \,.$$

Plech se tedy zahřeje o $\Delta T = 5{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K}$.

Radovan Lev
radovan.lev@fykos.cz

Úloha 10 ... diproton se loučí

4 body

Představme si, že máme částici složenou ze dvou protonů, tedy jádro helia 2. Taková částice je vysoce nestabilní a rychle se rozpadá na dva samostatné protony. Jakou největší rychlost mohou tyto protony získat po spontánním rozpadu v těžišťové soustavě? Uvažujte, že klidová hmotnost diprotonu je $2{,}015\,89\,\mathrm{Da}$ *a hmotnost jednoho protonu* $1{,}007\,825\,\mathrm{Da}$.

Karel přemýšlel, co by zadal na helium 2.

Klíčové je uvědomit si, že v těžišťové soustavě se podle zákona zachování hybnosti musí protony po rozpadu pohybovat rychlostmi o stejné velikosti na opačné strany. Tuto velikost poté dopočteme ze zákona zachování energie. Energie uvolněná rozpadem je dána vztahem

$$E = (m_\mathrm{d} - 2m_\mathrm{p})c^2 \,,$$

kde m_d je hmotnost diprotonu a m_p je hmotnost protonu. Tato energie se přemění na kinetickou energii

$$E = 2 \cdot \frac{1}{2} m_\mathrm{p} v^2 \,,$$

kde v je velikost rychlosti jednoho protonu. Pro tu tedy dostáváme

$$v = c\sqrt{\frac{m_\mathrm{d}}{m_\mathrm{p}} - 2}$$

neboli číselně $v = 4{,}63 \cdot 10^6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Vidíme, že velikost rychlosti protonů dosahuje zhruba 1,5 procenta rychlosti světla, což znamená, ze nerelativistická aproximace dává poměrně přesný výsledek.

Pozn.: Dalton je jednotka hmotnosti o velikosti rovné atomové hmotnostní konstantě.

Radovan Lev
radovan.lev@fykos.cz

Úloha 11 ... zrychlené zpomalení 4 body

Jarda si na kameru v autě natočil svoji cestu po městě. Na záznamu pak začal zkoumat úsek, na kterém jel maximální povolenou rychlostí $50\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$, přičemž $55\,\mathrm{m}$ před křižovatkou mu na semaforu blikla červená, takže s konstantním zrychlením zpomalil, aby u křižovatky stihl zastavit. Kolikrát zrychleně si musí pustit tento záznam, aby se mu zdálo, že zpomaloval s drastickým zrychlením $10g$? *Jarda chtěl všem dokázat, že je superhrdina.*

Označme $s = 55\,\mathrm{m}$ jako dráhu, po kterou musí brzdit, a_r jako zrychlení, se kterým ve skutečnosti brzdil, a podobně pak $v_\mathrm{r} = 50\,\mathrm{km\cdot h^{-1}} \doteq 13{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Ze zákona zachování energie můžeme napsat

$$Fs = ma_\mathrm{r}s = \frac{1}{2}mv_\mathrm{r}^2 \quad\Rightarrow\quad a_\mathrm{r} = \frac{v_\mathrm{r}^2}{2s} \doteq 1{,}75\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\,,$$

kde jsme porovnali původní kinetickou energii vozidla s prací, kterou musela vykonat brzdná síla F na jeho zastavení.

Nyní uvažujme, že si záznam pustí x-krát zrychleně. Pak se na záznamu pohybuje rychlostí $v_\mathrm{a} = xv_\mathrm{r}$. Uražená vzdálenost s je ale stejná, tu tedy upravovat nemusíme. Použijeme výše odvozený vztah a můžeme najít podmínku pro zrychlení

$$10g = a_\mathrm{a} = \frac{v_\mathrm{a}^2}{2s} = x^2\frac{v_\mathrm{r}^2}{2s} \quad\Rightarrow\quad x = \sqrt{10g\frac{2s}{v_\mathrm{r}^2}} = 7{,}5\,.$$

Záznam si musí pustit více než sedmkrát zrychleně, aby se na něm pohyboval s požadovaným zrychlením.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha 12 ... prasklá láhev 4 body

Elišce vyklouzla z ruky láhev perlivé vody, spadla na zem a při dopadu se v ní udělala díra, ze které začalo pití stříkat. Uvažujte modelovou situaci, kdy voda stříká pod úhlem $\alpha = 70^\circ$ (měřeným od země) do výšky $h = 1{,}20\,\mathrm{m}$. Jak velký je počáteční rozdíl tlaku v láhvi a okolního tlaku? *Elišce spadla láhev Kofoly.*

Ze zákona zachování energie určíme počáteční rychlost vody ve svislém směru

$$\frac{1}{2}mv_y^2 = mgh\,,$$

$$v_y = \sqrt{2gh}\,.$$

Celkovou rychlost pak určíme jako

$$v = \frac{v_y}{\sin(\alpha)}\,.$$

Nyní k propojení tlaku a této rychlosti využijeme Bernoulliho rovnici, která říká

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \mathrm{konst}\,.$$

Pro místo mezi vnitřkem lahve, kde má voda nulovou rychlost, a vodou venku, kde je tlak vody roven atmosferickému, tedy platí

$$p + p_\mathrm{a} = \frac{1}{2}\rho v^2 + p_\mathrm{a} \,.$$

Dosadíme za rychlost

$$p = \frac{1}{2}\rho \frac{2gh}{\sin^2(\alpha)} \,,$$

odkud

$$p \doteq 1{,}3 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa} \,.$$

Tlak v láhvi těsně po dopadu byl o zhruba $1{,}3 \cdot 10^4$ Pa vyšší než atmosférický tlak.

Radovan Lev
`radovan.lev@fykos.cz`

Úloha 13 ... velký kytarový třesk 4 body

Paťo při průchodu dveřmi zavadil kytarou o zárubeň. Později si při zjišťování napáchaných škod všiml, že jedna ze strun je naladěná přesně o půltón výše oproti původní frekvenci. Protože struna byla již předtím zralá na výměnu, řekl si Paťo, že zabije dvě mouchy jednou ranou.

Rozhodl se na strunu těsně a pevně navinout novou vrstvu drátu do tvaru šroubovice. Jak tlustý drát z identického materiálu si potřebuje koupit, aby navinutím přeladil strunu na původní frekvenci? Problematická struna má na začátku tloušťku 1,1 mm. *Uvažujte rovnoměrně temperované ladění a takovou manipulaci se strunou, že se nezmění síla, kterou je napínaná. Strunu v původním stavu i po navinutí drátu považujte za homogenní rotační válec.*

Paťovi se nechtělo si vyměnit struny.

Na úvod trocha hudobnej matematiky. Frekvencie poltónov pri rovnomerne temperovanom ladení tvoria geometrickú postupnosť. Poltóny sa následne po *dvanástich* spájajú do oktáv, pričom platí, že poltón o oktávu vyšší bude mať *dvojnásobnú* frekvenciu. Prekladom do matematiky ľahko odvodíme kvocient postupnosti q ako

$$2 = \frac{f_{n+12}}{f_n} = \frac{f_n \cdot q^{12}}{f_n} = q^{12} \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt[12]{2}$$

pre dva ľubovoľné o oktávu vzdialené poltóny s frekvenciami f_n a f_{n+12}. Označme frekvenciu struny pred rozladením (a po navinutí drôtu) f_d a frekvenciu po rozladení f_r. Podľa predošlej rovnice platí

$$f_\mathrm{r} = q f_\mathrm{d} = \sqrt[12]{2} f_\mathrm{d} \,.$$

Kmity struny popisujú tzv. Mersennove zákony, podľa ktorých struna dĺžky l o dĺžkovej hustote μ je napínaná silou F a kmitá s frekvenciou

$$f = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \,.$$

Ešte pred dosadením do predchádzajúcej rovnice si môžeme všimnúť, že navinutím drôtu na strunu sa nezmení jej dĺžka a podľa zadania ani sila, ktorou ladiaci kolík a struník strunu napínajú. Dostávame

$$\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\mu_\mathrm{r}}} = \frac{\sqrt[12]{2}}{2l}\sqrt{\frac{F}{\mu_\mathrm{d}}} \quad \Rightarrow \quad \mu_\mathrm{d} = \sqrt[6]{2}\mu_\mathrm{r}$$

pre dĺžkovú hustotu struny pred navinutím μ_r a po navinutí μ_d. Považujúc strunu za homogénny valec vieme vyjadriť jej dĺžkovú hustotu pomocou objemovej hustoty a prierezu. Drôt aj struna sú z rovnakého materiálu, z tohoto dôvodu ostane objemová hustota struny rovnaká a platí

$$\rho S_\mathrm{d} = \mu_\mathrm{d} = \sqrt[6]{2}\mu_\mathrm{r} = \sqrt[6]{2}\rho S_\mathrm{r} \quad \Rightarrow \quad S_\mathrm{d} = \sqrt[6]{2} S_\mathrm{r}$$

pre hustotu medi ρ, prierezy rozladenej struny S_r a struny s navinutým drôtom S_d. Zavedením valcovej aproximácie uvažujeme kruhové prierezy, určme teda ich priemery. Priemer rozladenej struny je zo zadania $d_\mathrm{r} = 1{,}1\,\mathrm{mm}$, jej následným ovinutím dostaneme strunu hrubšiu o dvojnásobok priemeru drôtu d_d

$$\pi\frac{(2d_\mathrm{d} + d_\mathrm{r})^2}{4} = S_\mathrm{d} = \sqrt[6]{2} S_\mathrm{r} = \sqrt[6]{2}\pi\frac{d_\mathrm{r}^2}{4}\,,$$

z čoho po vyjadrení d_d dostávame výsledok

$$d_\mathrm{d} = \left(\sqrt[12]{2} - 1\right)\frac{d_\mathrm{r}}{2} \doteq 3{,}3 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{mm}\,.$$

Zháňanie tak tenkého drôtu môže trvať večnosť, preto bude zrejme jednoduchšie aj napriek lenivosti strunu vymeniť a naladiť.

Patrik Stercz
`patrik.stercz@fykos.cz`

Úloha 14 ... cesta na cestě

4 body

Přívalové deště z rozestavěné cesty odnesly dlažební kostky ve tvaru krychle o hraně $10\,\mathrm{cm}$ *a hmotnosti* $2\,\mathrm{kg}$*. Jaká musela být minimální výška proudu vody, aby dokázal překonat koeficient tření* $0{,}5$ *a posunout tak kočičí hlavy, které ležely samostatně na podkladu? Voda se valila rychlostí* $1{,}3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$*. Uvažujte, že voda narážela na stěny kostky kolmo, a počítejte s koeficientem odporu* $1{,}05$*.*

V Česku byly v září záplavy.

Třecí síla je úměrná normálové síle, která je v tomto případě

$$N = mg - a^2 h\rho g\,,$$

kde jsme od tíhové síly odečetli vztlakovou. Zde h je hledaná výška vody a ρ její hustota, stranu kostky jsme označili jako a. Ačkoli je kostka na rovném povrchu, můžeme předpokládat, že tento povrch (např. písek) není natolik rovný a neporézní, že by se voda pod kostku nedostala. Voda tedy svým hydrostatickým tlakem zespodu na kostku působí.

Třecí síla musí být překonána odporovou silou vody, kterou určíme pomocí vztahu

$$F = \frac{1}{2} C a h \rho v^2\,,$$

kde $C = 1{,}05$ je koeficient odporu, v rychlost proudící vody a součin ah je plocha, na kterou voda působí. Z rovnosti sil dostáváme

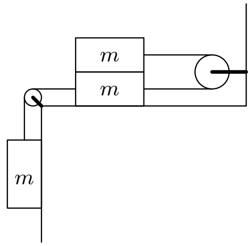
$$\frac{1}{2} C a h \rho v^2 = fmg - fa^2 h\rho g \quad \Rightarrow \quad h = \frac{fmg}{a\rho\left(\frac{1}{2}Cv^2 + fag\right)} \doteq 7{,}1\,\mathrm{cm}\,,$$

kde f je koeficient tření.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 15 ... kladky s kvádry a třením

5 bodů



Dva kvádry leží na sobě a jsou spojené přes kladku tak, že lano vede vodorovně v obou směrech. Spodní kvádr je spojený lanem přes kladku s dalším kvádrem, který na tomto laně visí. Mezi kvádry navzájem a mezi kvádry a podložkou je koeficient tření $f = 0{,}10$, všechny tři kvádry váží $m = 500\,\mathrm{g}$. Jaká bude velikost zrychlení visícího kvádru? Všechny kladky a lana jsou nehmotné a soustava je na začátku v klidu. *Legovi přišlo… že je to určitě úloha.*

Na začiatku je potrebné zistiť aké sú v systéme trecie sily. Horný kváder pôsobí na spodný silou mg, čiže trecia sila brzdiaca tento kváder bude fmg. Spodný kváder tak bude spomaľovaný reakciou od tejto sily. Zároveň tak bude spodný kváder pritláčaný k podložke silou $2mg$ a teda bude navyše spomaľovaný trecou silou medzi ním a podložkou $2fmg$, čiže spolu $3fmg$.

Nakoľko laná aj kladky sú nehmotné, napätie v lane sa nebude pozdĺž jeho dĺžky meniť. Označme si teda veľkosť napätia v lane, na ktorom visí kváder ako T_1 a veľkosť napätia v druhom lane T_2.

Veľkosti síl pôsobiacich na kvádre budú nasledujúce: na prvý kváder pôsobí tiažová sila a nahor ho ťahá lano

$$F_1 = mg - T_1\,,$$

kde volíme kladné znamienko v smeroch, v ktorých sa každý kváder bude pohybovať. Druhý kváder je urýchľovaný prvým lanom a je brzdený druhým lanom a trením

$$F_2 = T_1 - T_2 - 3fmg\,.$$

Posledný kváder je urýchľovaný druhým lanom a brzdený iba trecou silou.

$$F_3 = T_2 - fmg\,.$$

Nakoľko všetky kvádre sú „na jednom lane", budú ich zrýchlenia rovnako veľké. Inými slovami: keď sa pohne visiaci kváder o x nadol, pohnú sa oba zvyšné kvádre tiež o x. Tým pádom sa musia rovnať aj veľkosti ich zrýchlení. Dostávame teda rovnosť

$$ma = F_1 = F_2 = F_3\,,$$

ktorá je sústavou rovníc s tromi neznámymi: T_1, T_2, a. Vyjadríme najprv T_2

$$\begin{aligned} F_1 &= F_3 \\ mg - T_1 + fmg &= T_2\,, \end{aligned}$$

z čoho následne vyjadríme T_1

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2\,, \\ mg - T_1 &= T_1 - T_2 - 3fmg\,, \\ mg - T_1 &= T_1 - mg + T_1 - fmg - 3fmg\,, \\ 2mg + 4fmg &= 3T_1\,, \end{aligned}$$

z čoho už dostaneme hľadané zrýchlenie ako

$$
\begin{aligned}
ma &= F_1 \\
ma &= mg - \frac{2}{3}mg - \frac{4}{3}fmg \\
a &= \frac{1}{3}g - \frac{4}{3}fg = 2{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.
\end{aligned}
$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha 16 ... zvyšování stupně polarizace 4 body

Stupeň polarizace světla P je definován pomocí intenzit dvou navzájem kolmých polarizací I_1 a I_2 jako

$$P = \frac{|I_1 - I_2|}{I_1 + I_2}\,.$$

Představme si prostředí, ve kterém se intenzita vertikální polarizace světla po každé vzdálenosti L sníží na $99{,}0\,\%$, zatímco intenzita horizontální polarizace klesá rychleji, a to na $97{,}5\,\%$ s každou vzdáleností L. Po jaké vzdálenosti bude mít světlo stupeň polarizace $P = 0{,}420$? Jako odpověď zadávejte násobek L s přesností na jednu desetinu. Před vstupem do prostředí nebylo světlo polarizované ($P_0 = 0{,}000$). *Karel přemýšlel o anizotropním prostředí u voleb.*

Dle zadání víme, že můžeme psát, že vertikální intenzita I_v a horizontální intenzita I_h klesají se vzdáleností x dle vztahu

$$I_\mathrm{v} = 0,990^{x/L} I_0\,, \quad I_\mathrm{h} = 0,975^{x/L} I_0\,,$$

kde, pro jednoduchost, označíme I_0 jako intenzitu odpovídající počáteční intenzitě každé z polarizací, které jsou stejné (pozor, není to celková původní intenzita světelného paprsku – ta je dvojnásobná).

Tyto vztahy dosadíme do definice polarizace a řešíme rovnici

$$0{,}420 = \frac{0{,}990^{x/L} I_0 - 0{,}975^{x/L} I_0}{0{,}990^{x/L} I_0 + 0{,}975^{x/L} I_0} = \frac{0{,}990^{x/L} - 0{,}975^{x/L}}{0{,}990^{x/L} + 0{,}975^{x/L}}\,,$$

ze které vidíme, že výsledek nebude záviset na počáteční intenzitě. Rovnici můžeme na počítači asi nejjednodušeji řešit tak, že ji zadáme do nějakého programu, který nám rovnici vyřeší numericky. Použít můžeme WolframAlpha.[1]

Výsledek nám vychází jako $x = 58{,}6L$. Do herního systému bylo potřeba zadat 58,6.

[1] `https://www.wolframalpha.com/input?i=%280.99%5Ex+-+0.975%5Ex%29%2F%280.99%5Ex%2B+0.975%5Ex%29%3D0.420`

Pokud jste ale matematicky zdatnější a umíte rychle upravovat exponenciální rovnice, tak můžeme ukázat i tento postup, ve kterém ale člověk může často udělat chybu při přepisu.

$$
\begin{aligned}
0{,}420 \cdot \left(0{,}990^{x/L} + 0{,}975^{x/L}\right) &= 0{,}990^{x/L} - 0{,}975^{x/L}\\
1{,}420 \cdot 0{,}975^{x/L} &= 0{,}580 \cdot 0{,}990^{x/L}\\
\frac{1{,}420}{0{,}580} &= \frac{0{,}990^{x/L}}{0{,}975^{x/L}} = \left(\frac{0{,}990}{0{,}975}\right)^{x/L}\\
x &= \frac{\ln \frac{1{,}420}{0{,}580}}{\ln \frac{0{,}990}{0{,}975}} L \doteq 58{,}6\, L
\end{aligned}
$$

Došli jsme ke stejnému výsledku, tedy $x = 58{,}6L$. Závěrem bychom se mohli ještě podívat, na jakou úroveň intenzity poklesly jednotlivé polarizace. Tyto hodnoty jsou $I_\mathrm{v}(x) \doteq 0{,}555$ a $I_\mathrm{h}(x) \doteq 0{,}227$.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha 17 ... teplejší pozadí — 5 bodů

Jako jeden z dokladů velkého třesku dnes pozorujeme záření kosmického pozadí, které velice dobře odpovídá tepelnému záření černého tělesa o teplotě $T_0 = 2{,}725\,\mathrm{K}$. Uvážíme-li, že je vesmír starý $13{,}8 \cdot 10^9$ let, před kolika lety byla teplota tohoto záření $T = 1{,}1\,T_0$? Předpokládejte, že se vesmír rozpíná rovnoměrně (škálový faktor je přímo úměrný času).

Karel přemýšlel nad tím, jestli je vesmír nekonečný... jestli si dát toust...

Jestliže se vesmír rozpíná rovnoměrně, pak pro škálový faktor platí $a \sim t$. Škálový faktor vyjadřuje kolikrát větší či menší byl poměr vzdáleností v určitém čase ve vesmíru vůči současným vzdálenostem. Stejně jako všechny ostatní vzdálenosti se mění i vlnová délka záření kosmického pozadí. Díky tomu, že záření odpovídá vyzařování absolutně černého tělesa, můžeme využít Wienův vztah mezi jeho teplotou a vlnovou délkou

$$\lambda = \frac{b}{T}\,,$$

kde b je Wienova konstanta. Pro teplotu tedy platí $T \propto 1/\lambda$. Odtud dostaneme

$$\frac{T_0}{T} = \frac{\lambda}{\lambda_0}\,.$$

Poměr vlnových délek ovšem je

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{a}{a_0}\,.$$

Nakonec pro poměr škálových faktorů platí

$$\frac{a}{a_0} = \frac{t}{t_0}\,.$$

Spojením rovnic získáme

$$\frac{T_0}{T} t_0 = t \,,$$
$$\delta t = t_0 - t = t_0 \left(1 - \frac{T_0}{T}\right) \,,$$
$$\delta t = 1{,}25 \cdot 10^9 \,\mathrm{let}\,.$$

Pozn.: Přesnějším výpočtem pro vesmír, v němž převládá temná energie, dostaneme rozdíl časů zhruba $1{,}3 \cdot 10^9$ let. Vidíme tedy, že lineární aproximace dává pro takto malý rozdíl teplot řádově dobré odhady. Mimochodem, škálový faktor zvětšující se lineárně v čase je dobrým řešením Friedmannových rovnic a odpovídá negativně zakřivenému vesmíru, který neobsahuje žádnou látku (hmotu, záření ani temnou energii).

Radovan Lev
radovan.lev@fykos.cz

Úloha 18 ... kombinovaná 4 body

Mezi dvěma rovnoběžnými nekonečnými dráty vzdálenými od sebe $l = 10\,\mathrm{cm}$ *jsou napnuty nevodivé pružinky s tuhostí* $k = 10\,\mathrm{N{\cdot}mm^{-1}}$ *o klidové délce* l *se vzájemnou vzdáleností jednotlivých pružinek* $100\,\mathrm{km}$. *O kolik milimetrů se pružinka prodlouží po tom, co jedním z drátů začne procházet proud* $20\,\mathrm{A}$ *a druhým* $10\,\mathrm{A}$ *v opačném směru? Předpokládejte, že se systém již zcela ustálil.* *Káťa chtěla vymyslet nějakou úlohu, která spojuje více fyzikálních odvětví.*

Označme velikosti proudů tekoucích v drátech I_1 a I_2. Velikost síly, kterou se dráty odpuzují, vztaženou na délku drátu lze vyjádřit jako

$$|\mathbf{f}_1| = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \,,$$

kde d je vzdálenost drátů v ustáleném stavu a μ_0 je permeabilita vakua. Podívejme se nyní na jeden drát. Každá z pružinek na něj bude působit silou

$$\mathbf{F} = -k(d - l) \,.$$

Označíme-li δ vzdálenost mezi pružinkami, bude síla všech pružinek působící na tento drát vztažená na jeho délku

$$\mathbf{f}_2 = -\frac{k\,(d - l)}{\delta} \,.$$

Je-li systém v ustáleném stavu, je výslednice sil působící na drát nulová. Dostáváme tak

$$\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = 0 \,,$$
$$\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} - \frac{k\,(d - l)}{\delta} = 0 \,,$$

což vede na kvadratickou rovnici pro d ve tvaru

$$2\pi k d^2 - 2\pi l k d - \mu_0 \delta I_1 I_2 = 0 \,,$$

která má dvě reálná řešení

$$d = \frac{l}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{l^2 + \frac{2\mu_0 \delta I_1 I_2}{\pi k}}\,. \tag{1}$$

Z tvaru (1) je vidět, že minusové řešení vede na d záporné, a je tedy nefyzikální. Prodloužení pružinky tak bude

$$d - l = -\frac{l}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{l^2 + \frac{2\mu_0 \delta I_1 I_2}{\pi k}} = 3{,}9\,\mathrm{mm}.$$

Jakub Koňárek
`jakub.konarek@fykos.cz`

Úloha 19 ... laserový oběd

5 bodů

Ve třetí epizodě první série seriálu Teorie velkého třesku si Leslie Winkleová ohřívá oběd laserem. Z epizody se dozvíme, že se jedná o laser COIL ($\lambda = 1\,315\,\mathrm{nm}$) s výkonem $500\,\mathrm{kW}$ a ohřívání trvá $2{,}60\,\mathrm{s}$. Tepelná kapacita jejího oběda je $1{,}00\,\mathrm{kJ{\cdot}K^{-1}}$ a je potřeba ho ohřát o $60{,}0\,\mathrm{^\circ C}$, aby byl dobrý. Kolik molů fotonů vyzářených laserem za dobu ohřívání oběda se neuplatní na jeho ohřívání? Předpokládejte, že pokud foton energii obědu předá, nebude mít žádné ztráty.

Terka měla hlad v laborce.

Energii jednoho fotonu můžeme vyjádřit vzorcem

$$E_\mathrm{f} = \frac{hc}{\lambda}\,,$$

kde h je Planckova konstanta, c rychlost světla a λ vlnová délka světla. Dále potřebujeme vyjádřit celkovou energii potřebnou k ohřátí oběda, konkrétně to bude

$$E_\mathrm{o} = C\Delta T\,,$$

kde C je tepelná kapacita oběda a ΔT vyjadřuje, o jakou teplotu ho potřebujeme ohřát. Ještě by se nám hodilo vědět, kolik energie laser vyzáří za dobu, kdy je zapnutý, tedy

$$E_\mathrm{l} = P\tau\,,$$

kde P je výkon laseru a τ doba, po kterou jím ohříváme oběd.

Z těchto rovnic už jsme schopni vyjádřit energii, kterou neuplatníme na ohřívání oběda, tedy celkovou energii ztrát

$$E_\mathrm{z} = E_\mathrm{l} - E_\mathrm{o}\,,$$

z čehož počet fotonů, které se neuplatnily na ohřívání, vypočteme jako

$$N = \frac{E_\mathrm{z}}{E_\mathrm{f}}\,.$$

Po složení všech vztahů dohromady získáme

$$N = \lambda \frac{P\tau - C\Delta T}{hc}\,,$$

takže po dosazení zjistíme, že počet částic N a molů n je

$$N \doteq 8{,}21 \cdot 10^{24} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{N}{N_\mathrm{A}} \doteq 13{,}6\,\mathrm{mol}\,.$$

Tereza Voltrová
tereza.voltrova@fykos.cz

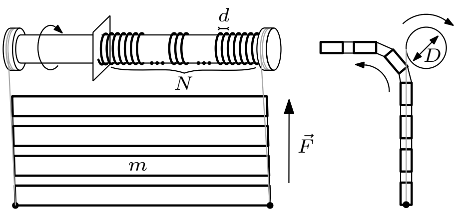
Úloha 20 ... garážová vrata

4 body

Garážová vrata mají hmotnost $m = 200\,\mathrm{kg}$. Aby motor vrat nemusel zvedat celou jejich tíhu, jsou vrata připojena na ocelovou torzní pružinu (viz obrázek 1). Ta má vnější průměr $D = 4{,}1\,\mathrm{cm}$ a průměr drátu je $d = 5{,}0\,\mathrm{mm}$. Jeden konec pružiny je pevně ukotven. Druhý se otáčí společně s osou, na níž je lanko, které je dole upevněné k vratům. Vrata se sklápí dovnitř garáže do vodorovné polohy a předpokládejme, že se na horní straně garáže lámou spojitě. Když jsou vrata sklopená dovnitř, je pružina uvolněná. Výška vrat je $H = 2{,}1\,\mathrm{m}$. Určete počáteční hraniční počet vinutí pružiny N tak, aby motor mohl působit nejvýše silou $F = 150\,\mathrm{N}$. Pro danou pružinu závisí moment síly M na úhlu otočení φ jako

$$M = k\varphi = \frac{Ed^4}{64ND}\varphi\,,$$

kde $E = 200\,\mathrm{GPa}$ je Youngův modul pružnosti oceli.



Obrázek 1: Schéma mechanismu vrat.

Jarda nechápal, proč ta vrata nejdou otevřít, když ta pružina praskla.

Máme tedy

$$M = k\varphi = \frac{Ed^4}{64ND}\varphi\,.$$

Síla působící na vrata směrem vzhůru je $F_\mathrm{p} = 2M/D$. Jestliže jsou vrata nahoře, je pružina dle zadání uvolněná. Když jsou vrata dole, tak se dle obrázku změní úhel φ o

$$\varphi = 2\pi\frac{H}{\pi D} = \frac{2H}{D}\,,$$

kde H je vzdálenost mezi stropem a spodní částí vrat.

Síla pružiny zvedající vrata tak je

$$F_\mathrm{p} = \frac{2}{D}\frac{Ed^4}{64ND}\frac{2H}{D} = \frac{Ed^4}{16ND^3}H\,.$$

Abychom mohli vrata zvednout, i když jsou celá dole, musíme za pomocí síly pružiny překonat jejich tíhovou sílu mg. Naše síla tedy musí být minimálně

$$F = mg - F_\mathrm{p} = mg - \frac{Ed^4}{16ND^3} H \,.$$

Odsud můžeme vyjádřit počáteční počet vinutí N jako

$$N = \frac{Ed^4}{16D^3\left(mg - F\right)} H \doteq 130 \,.$$

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha 21 ... kdo by se bójky bál

5 bodů

Na válcovou bójku o hmotnosti $m = 5{,}0\,\mathrm{kg}$ a obsahu podstavy $S = 0{,}20\,\mathrm{m}^2$ přistane racek vážící $M = 2{,}0\,\mathrm{kg}$, který ji svým nepříliš elegantním dosednutím rozkmitá. Vypočítejte periodu malých kmitů bójky, je-li orientována svisle, její vrchní podstava vyčnívá nad hladinu a je-li ke dnu přichycena napnutým řetězem přes pružinu o tuhosti $k = 2{,}0\,\mathrm{kN{\cdot}m^{-1}}$. Situace se odehrává na jezeře. *Vojta se bójky nebojí.*

V rovnovážném stavu jsou tíhová síla i síla pružnosti vyrovnávány vztlakovou silou. Platí tedy vztah

$$(m + M)g + kl_1 = Sl_2\rho g \,,$$

kde ρ představuje hustotu vody a l_1, l_2 jsou po řadě prodloužení pružiny a výška ponořené části válce v rovnovážném stavu. Pokud bójku vychýlíme z této rovnovážné polohy o l (můžeme uvažovat, že ji ponoříme o l), bude na ni působit síla F o velikosti

$$\begin{aligned} F &= S(l_2 + l)\rho g - k(l_1 - l) - (m + M)g = \\ &= \underbrace{Sl_2\rho g - k\,l_1 - (m + M)g}_{=0} + Sl\rho g + kl = l(S\rho g + k) \end{aligned}$$

orientovaná proti směru vychýlení bójky.

Všimněme si, že tento vztah matematicky odpovídá Hookeovu zákonu – vztahu pro sílu působící na pružinu o tuhosti $(S\rho g + k)$ vychýlenou o l. Ze znalosti vztahu pro periodu pružiny s danou tuhostí a hmotností závaží pak můžeme přímočaře spočítat

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + M}{S\rho g + k}} \doteq 0{,}26\,\mathrm{s} \,.$$

Nakonec zmíníme, že bychom se stejného vztahu mohli dobrat i řešením pohybové rovnice pro tuto soustavu, to ale díky matematické analogii není nutné.

Vojtěch David
vojtech.david@fykos.cz

Úloha 22 ... kutálející se sklenička s ledem 5 bodů

Mějme rouru (plášť válce) s velmi tenkými stěnami s plošnou hustotou $\sigma = 5{,}5\,\mathrm{kg\cdot m^{-2}}$, která je plná ledu s hustotou $\rho = 917\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ klouzající po stěnách roury bez tření. Položíme rouru na rovinu nakloněnou pod úhlem $\alpha = 30^\circ$ tak, aby se mohla kutálet bez podkluzování a s vodorovnou osou otáčení. Jaké bude zrychlení těžiště roury? Její poloměr je $r = 4{,}0\,\mathrm{cm}$ a délka $l = 11\,\mathrm{cm}$.

Lego se zamýšlel nad zrychlením kutálení.

Ľad v rúre má celkovú hmotnosť $m_\mathrm{l} = V_\mathrm{l}\rho = \pi r^2 l\rho$. Taktiež sa pohybuje rovnakou rýchlosťou ako ťažisko rúry. Označme si teda túto rýchlosť v, potom je kinetická energia ľadu

$$E_\mathrm{l} = \frac{1}{2}\pi r^2 l\rho v^2\,.$$

A nakoľko nie je medzi ním a rúrou žiadne trenie, nie je nič, čo by ho roztáčalo a teda nemusíme riešiť žiadnu rotačnú kinetickú energiu.

Plášť má hmotnosť $m_\mathrm{p} = S_\mathrm{p}\sigma = 2\pi rl\sigma$. Jeho ťažisko má rýchlosť v, čiže jeho translačná kinetická energia je

$$E_\mathrm{pt} = \pi rl\sigma v^2\,.$$

Lenže okrem translácie však aj rotuje, konkrétne takou uhlovou rýchlosťou, aby voči rovine neprešmykoval a platí tak $\omega = v/r$. Zároveň nakoľko je všetka hmota vzdialená od osi otáčania r, je tak moment zotrvačnosti $J_\mathrm{p} = m_\mathrm{p} r^2$. Rotačná kinetická energia plášťa tak bude

$$E_\mathrm{pr} = \frac{1}{2}J_\mathrm{p}\omega^2 = \pi rl\sigma r^2\frac{v^2}{r^2} = \pi rl\sigma v^2\,,$$

čo si bolo možné všimnúť aj bez použitia momentu zotrvačnosti. Spolu je teda kinetická energia rúry aj s ľadom

$$E_\mathrm{k} = E_\mathrm{l} + E_\mathrm{pt} + E_\mathrm{pr} = \frac{1}{2}\pi rl(r\rho + 4\sigma)v^2\,,$$

a môžeme teda považovať $\pi rl(r\rho + 4\sigma) = m_\mathrm{ef}$ za nejakú efektívnu zotrvačnú hmotnosť. Kým skutočná celková hmotnosť je $m = m_\mathrm{l} + m_\mathrm{p} = \pi rl(r\rho + 2\sigma)$.

Výsledná sila pôsobiaca na rúru je zložka jej tiažovej sily rovnobežná so smerom naklonenej roviny, čiže $F_\mathrm{v} = mg\sin\alpha$. Zrýchlenie dostaneme vydelením efektívnou zotrvačnou hmotnosťou ako

$$a = \frac{F_\mathrm{v}}{m_\mathrm{ef}} = \frac{\pi rl\,(r\rho + 2\sigma)\,g\sin\alpha}{\pi rl(r\rho + 4\sigma)} = g\sin\alpha\frac{r\rho + 2\sigma}{r\rho + 4\sigma} = 4{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha 23 ... lahodné palivo 5 bodů

Pan Simpson přijel do české jaderné elektrárny na konferenci jaderných bezpečnostních techniků. Při bezpečnostní kontrole čeští technici objevili, že pan Simpson spolkl ještě v domovské elektrárně uranovou peletku paliva do jaderného reaktoru. Předpokládejte, že peletka je vyrobena z čistého oxidu uranu UO_2, uran je obohacený a má složení $95\,\%$ izotopu ^{238}U a $5\,\%$ izotopu ^{235}U. Jaká je aktivita uranu v peletce, kterou pan Simpson spolkl? Peletka má válcový *tvar s průměrem $d = 7{,}5\,\mathrm{mm}$ a výškou $h = 11\,\mathrm{mm}$. Hustota oxidu uraničitého UO_2 je $\rho_{\mathrm{UO_2}} = 10{,}97\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$.*

Jindra ví, že jedna peletka je neškodná.

Molární hmotnost kyslíku je $m_\mathrm{O} = 16{,}00\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$. Molární hmotnost izotopu $^{238}\mathrm{U}$ je $m_{238} = 238\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$ a molární hmotnost izotopu $^{235}\mathrm{U}$ je $m_{235} = 235\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$. Poločasy rozpadu těchto dvou izotopů jsou $T_{238} = 4{,}468{\cdot}10^9\,\mathrm{yr} = 1{,}410{\cdot}10^{17}\,\mathrm{s}$ a $T_{235} = 7{,}038{\cdot}10^8\,\mathrm{yr} = 2{,}221{\cdot}10^{16}\,\mathrm{s}$. Hustota oxidu uraničitého $\mathrm{UO_2}$ je $\rho_{\mathrm{UO_2}} = 10{,}97\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$. Průměrná molární hmotnost oxidu uraničitého v peletce je

$$m_{\mathrm{UO_2}} = 2m_\mathrm{O} + (pm_{235} + (1-p)m_{238}) = 269{,}85\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}},$$

kde $p = 5\,\%$ je poměr izotopu $^{235}\mathrm{U}$. Objemová hustota molekul $\mathrm{UO_2}$ v peletce je

$$n = \frac{\rho_{\mathrm{UO_2}} N_\mathrm{A}}{m_{\mathrm{UO_2}}} = 2{,}448 \cdot 10^{22}\,\mathrm{cm^{-3}},$$

kde N_A je Avogadrova konstanta. Objemové hustoty atomů obou izotopů uranu jsou

$$n_{235} = pn, \quad n_{238} = (1-p)n.$$

Množství $\mathrm{UO_2}$ v jedné peletce není dostatečné na to, aby udrželo řízenou štěpnou reakci jako v jaderném reaktoru nebo neřízenou štěpnou reakci jako při jaderném výbuchu. Jediná aktivita v peletce tedy pochází z rozpadu obou radioaktivních izotopů $^{235}\mathrm{U}$ a $^{238}\mathrm{U}$ a z jejich dceřiných produktů.

Obecně se počet jader N radioaktivního izotopu s poločasem rozpadu T řídí rovnicí

$$N = N_0 2^{-\frac{t}{T}} = N_0 \mathrm{e}^{-\ln(2)\frac{t}{T}},$$

kde t je čas uplynulý od začátku měření a N_0 je počet jader v čase $t = 0$. Aktivita izotopu je

$$A = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{\ln(2)}{T} N_0 \mathrm{e}^{-\ln(2)\frac{t}{T}} = \frac{\ln(2)}{T} N.$$

Celková aktivita uranu v peletce je

$$A = \frac{\ln(2) pnV}{T_{235}} + \frac{\ln(2)(1-p)nV}{T_{238}},$$

kde $V = \pi d^2 h/4 = 0{,}4860\,\mathrm{cm^3}$ je objem peletky. Aktivita jader uranu v žaludku pana Simpsona číselně vychází $A = 74{,}12\,\mathrm{kBq} \doteq 74{,}1\,\mathrm{kBq}$.

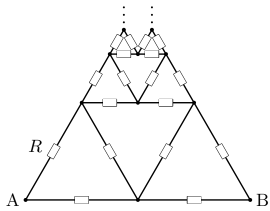
Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha 24 ... nekonečný odpor

5 bodů

Určete odpor nekonečné sítě ideálních rezistorů mezi body A a B. Každý rezistor na obrázku má stejný odpor $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$.

Jindra má rád trojúhelníky.



Označíme bod vpravo nahoře od bodu A jako C, bod vlevo nahoře od bodu B jako D a bod v půli mezi body A a B jako E. Pokud bychom odstranili body A, B, E a jejich spojení, odpor R_{tot} mezi body C a D by byl díky symetrii stejný jako mezi body A a B. Toho využijeme při výpočtu odporu R_{tot} mezi body A a B.

Uspořádání rezistorů v trojúhelnících ACE a BDE nahradíme uspořádáním do hvězdy. Vzhledem k tomu, že všechny rezistory mají stejný odpor R, má každé rameno hvězdy stejný odpor $R/3$. Odpor mezi body A a B je

$$
\begin{aligned}
R_{\mathrm{tot}} &= \frac{R}{3} + \frac{\frac{2R}{3}\left(\frac{2R}{3} + R_{\mathrm{tot}}\right)}{\frac{4R}{3} + R_{\mathrm{tot}}} + \frac{R}{3}\,,\\
R_{\mathrm{tot}}\left(\frac{4R}{3} + R_{\mathrm{tot}}\right) &= \frac{2R}{3}\left(\frac{4R}{3} + R_{\mathrm{tot}}\right) + \frac{2R}{3}\left(\frac{2R}{3} + R_{\mathrm{tot}}\right)\,,\\
R_{\mathrm{tot}}^2 + \frac{4R}{3}R_{\mathrm{tot}} &= \frac{8R^2}{9} + \frac{2R}{3}R_{\mathrm{tot}} + \frac{4R^2}{9} + \frac{2R}{3}R_{\mathrm{tot}}\,,\\
0 &= R_{\mathrm{tot}}^2 - \frac{12R^2}{9}\,,\\
R_{\mathrm{tot}} &= \frac{2\sqrt{3}}{3}R = 1{,}154\,701\,\mathrm{k\Omega}\,.
\end{aligned}
$$

Celkový odpor této nekonečné sítě rezistorů je $1{,}154\,701\,\mathrm{k\Omega}$.

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha 25 ... živý přenos

5 bodů

Obrazovku o úhlopříčce $u = 23\,\mathrm{inch}$ a rozlišení $1\,920\,\mathrm{px} \times 1\,080\,\mathrm{px}$ snímáme ze vzdálenosti $d = 1\,\mathrm{m}$ kamerou, přičemž obraz z kamery se živě přenáší na obrazovku. Uvažujte, že kamera snímá čtvercovou plochu s diagonálním zorným úhlem $\alpha = 50\,^{\circ}$, obraz z kamery se přizpůsobí rozměrům televize (tj. původně čtvercový obraz bude protažen na celou plochu obrazovky) a že kamera je umístěna na ose symetrie obrazovky. Kolikrát se nám obrazovka zobrazí sama do sebe, jestliže nejmenší obrazovku dokážeme ještě rozlišit, pokud má její plocha alespoň $100\,\mathrm{px}$?

Jarda si pořídil novou kameru.

Má-li kamera zorný úhel α, pak v rovině televizní obrazovky zachytí čtvercovou plochu o straně

$$
s_{\mathrm{k}} = \left(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)d\right) = 0{,}659\,\mathrm{m}\,.
$$

Ze znalosti délky úhlopříčky a poměru stran televize určíme její šířku jako

$$
s_{\mathrm{t}} = \frac{16}{\sqrt{16^2 + 9^2}}u = 0{,}509\,\mathrm{m}\,,
$$

její výška je pak

$$v_\mathrm{t} = \frac{9}{\sqrt{16^2 + 9^2}} u = 0{,}286\,\mathrm{m}\,,$$

s dosazením $u = 23\,\mathrm{inch} = 58{,}42\,\mathrm{cm}$.

Poměr délky strany televize k šířce obrazu zachyceného kamerou určuje, jak se daná strana po promítnutí na televizi zmenší. To znamená, že strany obrazovky se v prvním obraze zmenší na

$$s_\mathrm{t} \to s_\mathrm{t}\frac{s_\mathrm{t}}{s_\mathrm{k}} \quad \mathrm{a} \quad v_\mathrm{t} \to v_\mathrm{t}\frac{v_\mathrm{t}}{s_\mathrm{k}}\,.$$

Takto zmenšený obraz televize je novým vzorem. Dále proto postupujeme obdobně a dostáváme geometrickou řadu, kde pro počet pixelů, na kterých je zobrazen n-tý obraz televize, platí

$$R_n = R_\mathrm{t}\left(\frac{v_\mathrm{t} s_\mathrm{t}}{{s_\mathrm{k}}^2}\right)^n ,$$

kde R_t je celkový počet pixelů na televizi, tedy

$$R_\mathrm{t} = 1\,920 \times 1\,080\ \mathrm{px} = 2\,073\,600\,\mathrm{px}\,.$$

Řešením nerovnice

$$100 < R_\mathrm{t}\left(\frac{v_\mathrm{t} s_\mathrm{t}}{{s_\mathrm{k}}^2}\right)^n$$

dostaneme, že $n < 9{,}09$. Je nutné se podívat na dolní celou část, tedy $n_\mathrm{max} = 9$. Devátou televizi ještě uvidíme, ale desátou již ne.

Radovan Lev
radovan.lev@fykos.cz

Úloha 26 ... periodické vychylování

5 bodů

Elektrony urychlené napětím $1{,}0\,\mathrm{kV}$ *prochází středem vychylovacího deskového kondenzátoru o délce* $3{,}0\,\mathrm{cm}$. *Na ten je připojené střídavé napětí o amplitudě* $40\,\mathrm{V}$ *a frekvenci* $50\,\mathrm{Hz}$. *Elektrony dopadají na stínítko osciloskopu umístěné ve vzdálenosti* $40\,\mathrm{cm}$ *od konce kondenzátoru. S jakou maximální rychlostí se pohybuje stopa svazku po stínítku? Vzdálenost desek kondenzátoru je* $5{,}0\,\mathrm{mm}$ *a elektrické pole mimo něj neuvažujte.* *Jarda obdivuje moderní ploché obrazovky.*

Spočítejme rychlost příchozích elektronů. Jestliže byly urychlené napětím $V = 1{,}0\,\mathrm{kV}$, pak je jejich energie Ve. Porovnáním s jejich kinetickou energií $m_\mathrm{e} v_x^2/2$ dostáváme jejich rychlost jako

$$v_x = \sqrt{\frac{2Ve}{m_\mathrm{e}}} \doteq 19 \cdot 10^6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,,$$

kde m_e je hmotnost elektronu a e elementární náboj. Prostor kondenzátoru tedy tyto elektrony proletí za čas

$$\tau = \frac{l_1}{v_x} \doteq 1{,}6 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s}\,,$$

kde $l_1 = 3{,}0\,\mathrm{cm}$ je délka kondenzátoru. Platí tedy, že v prostoru kondenzátoru se elektrony zdrží jen nepatrný čas.

Po tento čas na ně působí elektrická síla kolmá k deskám kondenzátoru. Elektrické pole mezi deskami je

$$E = \frac{U(t)}{d} = \frac{U_0}{d} \sin \omega t \,,$$

kde $U(t)$ je napětí na deskách kondenzátoru, $d = 5{,}0\,\mathrm{mm}$ je vzdálenost mezi nimi, $U_0 = 40\,\mathrm{V}$ je amplituda tohoto napětí a $\omega = 2\pi f = 314\,\mathrm{s^{-1}}$ je úhlová frekvence změny napětí.

Toto pole se však mění mnohem pomaleji, než je doba průletu elektronu. Můžeme proto předpokládat, že za dobu, po kterou se elektron nachází mezi deskami, se velikost pole nezmění, a působí tak na elektron silou s konstantní velikostí. Tato síla tedy je

$$F = -Ee = -\frac{U_0 e}{d} \sin \omega t \,.$$

Elektron se tak ve směru kolmém na desky pohybuje se zrychlením $a_y = F/m_\mathrm{e}$ a to po čas τ. V tomto směru tedy získá při průletu kondenzátorem rychlost

$$v_y = a_y \tau = -\frac{U_0 e}{d m_\mathrm{e}} \tau \sin \omega t \,.$$

Směr jeho letu po výstupu z kondenzátoru je dán poměrem v_y a v_x. Z podobnosti trojúhelníků určíme vzdálenost y mezi rovinou symetrie a místem dopadu na stínítko, jako

$$\frac{y}{l_2} = \frac{v_y}{v_x} \quad \Rightarrow \quad y = l_2 \frac{v_y}{v_x} = -l_1 l_2 \frac{1}{v_x^2} \frac{U_0 e}{d m_\mathrm{e}} \sin \omega t = -\frac{l_1 l_2}{d} \frac{U_0}{2V} \sin \omega t \,.$$

Jako $l_2 = 40\,\mathrm{cm}$ jsme označili vzdálenost stínítka od konce kondenzátoru.

Vidíme, že tato poloha závisí periodicky na čase. Je to poloha stopy svazku na stínítku. Abychom našli rychlost, s jakou se tato stopa pohybuje, spočítáme její derivaci jako

$$v_\mathrm{s} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{l_1 l_2}{d} \frac{U_0}{2V} \omega \cos \omega t \,.$$

S touto rychlostí se v závislosti na čase mění poloha stopy. Maximální hodnota nastává pokaždé, když $\cos \omega t = 1$, a má velikost

$$v_\mathrm{s,max} = \pi f \frac{l_1 l_2}{d} \frac{U_0}{V} = 15\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \,,$$

kde jsme ještě za úhlovou frekvenci dosadili $\omega = 2\pi f$.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 27 ... choď přes přechod — 5 bodů

Jarda se rozhodl přejít silnici širokou $5{,}0\,\mathrm{m}$ ve chvíli, kdy se k němu prostředkem vzdálenějšího pruhu blížilo auto rychlostí $50\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Auto bylo široké $1{,}5\,\mathrm{m}$, jelo uprostřed svého pruhu a nijak nehodlalo brzdit. Jarda silnici přeběhl před autem rychlostí $3{,}0\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Jak nejblíže (po silnici) k Jardovi mohlo auto být v okamžiku, kdy se rozhodl vkročit do silnice, jestliže ho auto nesrazilo? Jarda běžel přes silnici po přímce. *Jarda nechodí vždycky přes přechod...*

Jarda vkročí do silnice s rychlostí $u = 3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ pod úhlem α vzhledem k normále ke krajnici. Aby ho auto nesrazilo, je potřeba se vyhnout pravé části jeho předního nárazníku. Ta se pohybuje rychlostí $v = 50\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ ve vzdálenosti $d = 4{,}5\,\mathrm{m}$ (neboť pruh je široký $2{,}5\,\mathrm{m}$ a auto jede uprostřed, jeho okraj je tak vzdálen $0{,}5\,\mathrm{m}$ od vzdálenější krajnice).

Jarda vzdálenost d urazí za čas

$$t = \frac{d}{u\cos\alpha}\,.$$

Auto za tento čas urazí $L' = vt$. Označme hledanou vzdálenost L. Pro ni platí

$$L = L' - d\,\mathrm{tg}\,\alpha = d\left(\frac{v}{u\cos\alpha} - \mathrm{tg}\,\alpha\right) = \frac{d}{\cos\alpha}\left(\frac{v}{u} - \sin\alpha\right)\,.$$

Tuto funkci $L(\alpha)$ si vykreslíme v nějakém grafickém programu (např. v Geogebře) a jednoduše odečteme, že minimální hodnota je přibližně $20\,\mathrm{m}$. To není moc velká vzdálenost, rozhodně je bezpečnější dát si větší rezervu. Také bychom mohli použít derivování a výsledek spočítat.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 28 ... výstřel k lepším zítřkům — 5 bodů

Z děla, které je na rovníku pevně připevněno k zemi, vystřelíme kouli o hmotnosti $5\,\mathrm{kg}$ *pod úhlem* 45°*, která dopadne ve vzdálenosti* $50\,\mathrm{m}$ *od děla. Jak by se zkrátil siderický den, kdyby se Země otáčela takovou úhlovou rychlostí, jakou se bude otáčet těsně po výstřelu? Střílíme směrem na západ a Zemi aproximujeme jako homogenní kouli. Neuvažujte jiné vlivy než gravitační působení Země.* *Monča si pro krácení času střílí z korektorů.*

Úlohu vyřešíme pomocí zákona zachování momentu hybnosti. Ten říká, že celkový moment hybnosti v izolované soustavě musí být zachován – v důsledku toho bude platit

$$L_{\mathrm{Z2}} = L_{\mathrm{Z1}} + L_{\mathrm{s}}\,, \tag{2}$$

kde L_{Z1} značí původní moment hybnosti Země, L_{Z2} značí moment hybnosti Země bezprostředně po výstřelu a L_{s} značí moment hybnosti střely. Ten určíme z její rychlosti. Vyjádříme-li si jej ve vektorové podobě, dostaneme z definice

$$\mathbf{L}_{\mathrm{s}} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} = m\mathbf{r}\times\mathbf{v}\,,$$

kde $m = 5\,\mathrm{kg}$ je hmotnost koule, $\mathbf{v}$ značí vektor rychlosti střely a $\mathbf{r}$ je průvodič rotace (v našem případě, kdy se nacházíme na rovníku, se jedná o vektor směřující od středu Země k dělu). Pro účely úlohy nás zajímá pouze velikost momentu hybnosti – z vlastností vektorového součinu proto můžeme psát

$$L_{\mathrm{s}} = mR_{\oplus}v_x\,,$$

kde $R_{\oplus} = 6{,}378\cdot 10^6\,\mathrm{m}$ je rovníkový poloměr Země a v_x je vodorovná složka rychlosti koule. Protože střílíme pod úhlem 45°, bude tato vodorovná složka rovna složce svislé. Dále víme, že střílíme na vzdálenost $x = 50\,\mathrm{m}$ a při tíhovém zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Sepišme proto rovnice vrhu pro bod dopadu

$$x = v_x t\,,$$
$$0 = v_x t - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Vyjádřením času z první rovnice a dosazením do rovnice druhé dostáváme

$$v_x = \sqrt{\frac{gx}{2}}\,.$$

Nyní se vraťme k rovnici (2). Víme, že pro moment hybnosti koule o hmotnosti M a poloměru r, rotující úhlovou rychlostí ω platí

$$L_\circ = \frac{2}{5}Mr^2\omega\,.$$

V situaci před výstřelem máme úhlovou rychlost $\omega_1 = 7{,}292 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s^{-1}}$, která odpovídá jedné rotaci za 23 hodin, 56 minut a 4 sekundy, což je délka siderického dne. Po výstřelu uvažujeme úhlovou rychlost $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$. Označíme-li tedy hmotnost Země $M_\oplus = 5{,}974 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, můžeme původní rovnici upravit na

$$\frac{2}{5}M_\oplus R_\oplus^2(\omega_1 + \Delta\omega) = \frac{2}{5}M_\oplus R_\oplus^2\omega_1 + mv_xR_\oplus\,,$$

odkud vyjádříme $\Delta\omega$ jako

$$\Delta\omega = \frac{5mv_x}{2M_\oplus R_\oplus}\,.$$

Nyní z této úhlové rychlosti vyjádříme změnu délky dne ΔT. Dostáváme

$$\Delta T = \frac{2\pi}{\omega_1} - \frac{2\pi}{\omega_1 + \Delta\omega} = \frac{2\pi}{\omega_1}\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_1}}\right) \overset{(*)}{\approx} 2\pi\frac{\Delta\omega}{\omega_1^2} = \frac{5\pi m}{M_\oplus R_\oplus \omega_1^2}v_x = \frac{5\pi m}{M_\oplus R_\oplus \omega_1^2}\sqrt{\frac{gx}{2}}\,,$$

kde v úpravě $(*)$ využíváme toho, že $1/(1+x) \approx 1 - x$ pro dostatečně malé x (a v našem případě je tato aproximace opodstatněná, jak zjistíme po dosazení).

Numerickým dosazením pak dostáváme

$$\Delta T \doteq 6{,}1 \cdot 10^{-21}\,\mathrm{s}\,.$$

Vidíme, že ΔT je nepatrné vůči T, což dokazuje, že náš předpoklad $\Delta\omega/\omega_1 \ll 1$ byl správný.

Monika Drexlerová
monika.drexlerova@fykos.cz

Úloha 29 ... visící mobil — 5 bodů

Petrovi spadl z poličky mobil o hmotnosti $m = 200\,\mathrm{g}$ připojený na nabíječku zasunutou v zásuvce s kabelem tvořeným dvěma měděnými dráty kruhového průřezu o délkách $l_0 = 1{,}00\,\mathrm{m}$ s průměrem $d_0 = 1{,}50\,\mathrm{mm}$ a zůstal na ní viset. O kolik nanoohmů se změnil odpor nabíječky? Uvažujte, že nabíječka tvoří s mobilem sériově zapojený obvod se zdrojem v zásuvce. Youngův modul pružnosti mědi je $E = 110\,\mathrm{GPa}$, její Poissonův poměr $\nu = 0{,}340$ a její měrný elektrický odpor $\rho = 16{,}78\,\mathrm{n\Omega{\cdot}m}$. Vliv plastového obalu kabelu zanedbejte.

Petrovi spadl mobil (znovu).

Nejprve si spočítáme, jak se změní rozměry drátů. Visící mobil působí na nabíječku silou $F = mg$. Protože průřezy drátů jsou kruhové, platí pro jejich obsahy $S_0 = \pi d_0^2/4$ a pro napětí σ na každém z drátů

$$\sigma = \frac{mg}{2S_0} = \frac{2mg}{\pi d^2} \doteq 555{,}1\,\mathrm{kPa}\,,$$

přičemž tíhovou sílu F_g dělíme dvěma, protože mobil je zavěšený na dvou drátech.

Novou délku drátu můžeme spočítat z Hookeova zákona jako

$$l = l_0 \left(1 + \frac{\sigma}{E}\right) \doteq 1{,}000\,005\,\mathrm{m}\,.$$

Drát se však protažením také zúží. Poissonův poměr mědi je $\nu = 0{,}340$, pro nový průměr tedy platí

$$d = d_0 \left(1 - \frac{\nu\sigma}{E}\right)\,.$$

Abychom nalezli odpor nabíječky, použijeme vztah využívající měrné rezistivity

$$R = \rho \frac{l}{S}\,.$$

Pro rozdíl původního a nového odporu tedy platí

$$R - R_0 = 2\rho \left(\frac{l}{S} - \frac{l_0}{S_0}\right)\,,$$

kde koeficient 2 před výrazem vpravo vyjadřuje, že řešíme změnu odporu dvou identických drátů zapojených v sérii. Dosazením dostáváme

$$R - R_0 = \frac{2\rho l_0}{S_0} \left(\frac{1 + \frac{\sigma}{E}}{\left(1 - \frac{\nu\sigma}{E}\right)^2} - 1\right)\,.$$

Abychom mohli tento výraz dále zjednodušit, můžeme si rozvinout koeficient v prvním členu v závorce do Taylorova polynomu

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{\nu\sigma}{E}\right)^2} \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + o(x^2)\,.$$

Dosazením rozvoje do původního vztahu a zanedbáním kvadratického členu v Taylorově rozvoji dostáváme

$$R - R_0 = \frac{2\rho l_0 \sigma}{S_0 E} \left(2\nu + 1\right)\,,$$

což po dosazení numerických hodnot vychází jako

$$R - R_0 \doteq 161{,}0\,\mathrm{n\Omega}\,.$$

Petr Sacher
petr.sacher@fykos.cz

Úloha 30 ... soustředné sféry

5 bodů

Mějme nekonečně mnoho soustředných kulových ploch s rovnoměrně rozloženým nábojem. Nejmenší sféra s poloměrem $r = 0{,}1\,\mathrm{mm}$ má kladný náboj $2Q$, kde Q má hodnotu elementárního náboje. Všechny ostatní sféry mají (rovněž kladný) náboj Q a poloměr n-té sféry je n-krát větší než poloměr $(n-1)$-té sféry. Jaký je potenciál na povrchu nejmenší sféry, jestliže nulový potenciál je v nekonečnu?

Monča našla potenciální využití nějaké aproximace.

Potenciál elektrického pole na sféře se chová stejně jako potenciál okolo nabitého bodu, který má stejný náboj jako sféra. Lze jej tedy vyjádřit jako

$$\varphi = k\frac{q}{r}\,,$$

kde q je náboj a $k = 1/(4\pi\varepsilon)$ je konstanta popisující prostředí. Podle principu superpozice se elektrická pole jednotlivých sfér neovlivní, celkový potenciál na povrchu nejmenší sféry bude tedy dán součtem potenciálů jednotlivých sfér – bude tedy třeba sečíst všech nekonečně mnoho vrstev. Pokud si rozepíšeme prvních pár členů součtu, můžeme si všimnout jistého vzorce

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= k\frac{2Q}{r}\,,\\
\varphi_2 &= k\frac{Q}{2r}\,,\\
\varphi_3 &= k\frac{Q}{2\cdot 3r} = k\frac{Q}{3!r}\,,\\
\varphi_4 &= k\frac{Q}{2\cdot 3\cdot 4r} = k\frac{Q}{4!r}\,.
\end{aligned}$$

Není těžké ověřit, že tento trend bude pokračovat a pro každou n-tou vrstvu (pro $n \geq 2$) tedy bude platit

$$\varphi_n = k\frac{Q}{n!r}\,.$$

Nyní můžeme z celého nekonečného součtu vytknout konstantu kQ/r, dostaneme

$$\varphi_{\mathrm{cel}} = k\frac{Q}{r}\left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots\right)\,.$$

Nekonečný výraz, který nám zůstal v závorce, je rozvoj Eulerova čísla; řešení tedy lze zapsat jako

$$\varphi_{\mathrm{cel}} = k\frac{Qe}{r}\,.$$

Po dosazení číselných hodnot vychází

$$\varphi_{\mathrm{cel}} = k\frac{Qe}{r} = 9\cdot 10^9\,\frac{1{,}602\cdot 10^{-19}e}{1\cdot 10^{-4}} = 3{,}9\cdot 10^{-5}\,\mathrm{V}\,.$$

Potenciál na povrchu nejmenší sféry je $\varphi_{\mathrm{cel}} = 3{,}9\cdot 10^{-5}\,\mathrm{V}$.

Monika Drexlerová
monika.drexlerova@fykos.cz

Úloha 31 ... odměřený plyn

5 bodů

Odměrný válec ponoříme celý do vody, otočíme dnem vzhůru a vysuneme tak, že jeho část nad hladinou je plná vody. Poté pod něj do vody přivedeme trubičku, kterou necháme protékat argon z tlakové lahve. Plyn bublá směrem do válce tak, že se nahoře vytvoří plynová kapsa. Jakmile se argon ustálí a hladina vody ve válci a mimo něj se srovná na stejnou úroveň, změříme, že objem plynu je $0{,}85\,\mathrm{l}$. *Jaká je hmotnost argonu ve válci? Teplota vody a uvnitř válce je* $81\,^{\circ}\mathrm{C}$, *v okolí je atmosférický tlak.* *Jarda i letos zkouší řešitele nachytat.*

Jakmile se vyrovnají hladiny, je uvnitř stejný tlak jako venku, tedy atmosférický. Uvnitř je tedy

$$n = \frac{pV}{RT}$$

molů plynů. Experiment ale probíhá za poměrně vysoké teploty, kdy už je nezanedbatelný tlak sytých vodních par. Molekuly vody se vypařují z povrchu hladiny do objemu válce, v rovnováze ale stejné množství kondenzuje zpátky. Celkový tlak p_a uvnitř válce je tak dán součtem tlaku molekul vody $p_{\mathrm{H_2O}}$ a argonu p_Ar, podobně je tomu se součtem všech částic.

Tlak sytých vodních par při $81\,^{\circ}\mathrm{C}$ je asi $p_{\mathrm{H_2O}} = 0{,}05\,\mathrm{MPa}$,[2] což je přibližně polovina atmosférického tlaku. Parciální tlak argonu a počet molů jeho částic ve válci proto je

$$p_\mathrm{Ar} = p_\mathrm{a} - p_{\mathrm{H_2O}} \doteq 50\,\mathrm{kPa}\,, \quad n_\mathrm{Ar} = \frac{p_\mathrm{Ar}V}{RT} \doteq 0{,}014\,\mathrm{mol}\,.$$

Molární hmotnost argonu je $M_\mathrm{Ar} \doteq 40\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$, jeho hmotnost ve válci je proto

$$m_\mathrm{Ar} = M_\mathrm{Ar} n_\mathrm{Ar} = M_\mathrm{Ar}\frac{(p_\mathrm{a} - p_{\mathrm{H_2O}})V}{RT} \doteq 0{,}58\,\mathrm{g}\,.$$

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha 32 ... sledování počasí

5 bodů

Meteorologická družice kontinuálně pořizuje snímky zemského povrchu. Data vysílá k Zemi na konstantní frekvenci f. *Jindra zachytil na anténě signál družice poprvé ve chvíli, kdy vystoupala těsně nad obzor. Frekvence byla* $f_\mathrm{max} = 137{,}915\,51\,\mathrm{MHz}$. *Družice následně stoupala dále nad obzor a kulminovala v nadhlavníku. Poslední signál Jindra zachytil těsně před tím, než družice zaletěla pod obzor. Tehdy byla frekvence* $f_\mathrm{min} = 137{,}909\,49\,\mathrm{MHz}$. *Jaký je poloměr oběžné dráhy družice?*

Předpokládejte, že družice obíhá okolo Země po kruhové dráze. Zanedbejte rotaci Země a její vliv na posun frekvence. *Jindra byl na Expě.*

K posunu frekvence dochází v důsledku Dopplerova jevu. K Dopplerovu jevu ve vedoucím řádu přispívá jen průmět vektoru rychlosti do spojnice mezi družicí a pozorovatelem. Družice obíhá Zemi po kruhové dráze se zatím neznámým poloměrem R. Její velikost rychlosti je konstantní

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}\,,$$

[2] Viz např. https://www.tzb-info.cz/tabulky-a-vypocty/9-vlastnosti-syte-vodni-pary-pri-danem-tlaku.

kde G je gravitační konstanta a $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ je hmotnost centrálního tělesa, v tomto případě Země.

Jelikož družice přelétala Jindrovi nad hlavou, její průmět rychlosti při přeletu přes obzor byl

$$u = \sqrt{\frac{GM}{R}}\frac{R_\oplus}{R},$$

kde $R_\oplus$ je poloměr Země.

Při východu družice nad obzor pozorovatel naměřil vyšší frekvenci

$$f_\mathrm{max} = \frac{c}{c-u}f,$$

protože v tu chvíli se vzdálenost mezi ním a družicí zkracovala. Při západu družice pod obzor naměřil pozorovatel nižší frekvenci

$$f_\mathrm{min} = \frac{c}{c+u}f,$$

jelikož v tu chvíli se od něj družice vzdalovala.

Tyto dvě rovnice můžeme spojit do jedné

$$\begin{aligned} f_\mathrm{max}(c-u) &= f_\mathrm{min}(c+u), \\ u &= c\frac{f_\mathrm{max}-f_\mathrm{min}}{f_\mathrm{max}+f_\mathrm{min}}, \\ \sqrt{GMR_\oplus^2}\frac{1}{R^{3/2}} &= c\frac{f_\mathrm{max}-f_\mathrm{min}}{f_\mathrm{max}+f_\mathrm{min}}, \\ R &= \sqrt[3]{\frac{GMR_\oplus^2}{c^2}\left(\frac{f_\mathrm{max}+f_\mathrm{min}}{f_\mathrm{max}-f_\mathrm{min}}\right)^2} = \\ &= 7\,229\,\mathrm{km} \doteq 7\,230\,\mathrm{km}. \end{aligned}$$

Družice obíhá Zemi po kruhové dráze s poloměrem $R = 7\,230\,\mathrm{km}$.

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha 33 ... předražený taxík — 6 bodů

Během jízdy taxíkem Monču napadlo, že pro žádný taxík nemůže být výhodné, když bude zákazník jeho služeb využívat příliš dlouho. Nechala se však unést fantazií a představila si taxík, který během jízdy postupně zvyšuje svou sazbu. Představme si hypotetický taxík fungující následovně: za první hodinu jízdy si účtuje pevnou konečnou cenu, tuto částku si pak účtuje i pro následujících 59 minut jízdy. Doba jízdy, která stojí tuto cenu, dále klesá jako geometrická posloupnost. Tento taxík navíc jezdí po úsecích délky s_0, přičemž první z nich překoná za 1 hodinu, druhý za 1 hodinu a 1 minutu a tato doba ujetí úseku délky s_0 dále roste jako geometrická posloupnost.

Uvažme nejkratší možnou jízdu, za kterou bychom zaplatili nekonečnou sumu. Určete celkovou průměrnou rychlost takovéto jízdy, pokud je rychlost taxíku v každém úseku konstantní, přičemž v prvním úseku jede taxík rychlostí $30\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. *Monču natáhli v taxíku.*

K výpočtu průměrné rychlosti potřebujeme určit celkový čas t a celkovou dráhu s jízdy taxíkem.

Nejprve spočítejme celkový čas. Doba jízdy, která stojí stejnou cenu, se zmenšuje jako geometrická posloupnost. Z jejích prvních dvou členů spočítáme její kvocient

$$q = \frac{t_2}{t_1}\,,$$

kde $t_1 = 60\,\mathrm{min}$ a $t_2 = 59\,\mathrm{min}$.

Aby cesta taxíkem stála nekonečnou sumu, musíme konečnou sazbu zaplatit nekonečněkrát. Minimální dobu jízdy t tedy vypočteme sečtením geometrické řady (nekonečné sumy) s kvocientem q a prvním členem t_1. Dostáváme

$$t = t_1 \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{t_1}{1-q}\,. \tag{3}$$

Nyní se vrhněme na výpočet ujeté dráhy. První úsek projel taxík rychlostí $v_1 = 30\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ za čas t_1. Délka každého z úseků je tedy $s_0 = v_1 t_1$. Celková délka jízdy roste s počtem takových ujetých úseků jako geometrická řada. Její kvocient opět určíme jako

$$r = \frac{\tau_2}{\tau_1}\,,$$

kde $\tau_1 = 60\,\mathrm{min}$ a $\tau_2 = 61\,\mathrm{min}$. Doba jízdy přes n úseků tedy bude tvaru

$$\tau = \tau_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}\,. \tag{4}$$

Vyjádříme-li z (4) počet úseků n, můžeme dosadit za τ skutečnou dobu jízdy t dle (3)

$$n = \log_r \left[1 + \frac{(r-1)t}{\tau_1}\right] = \frac{1}{\ln r} \ln\left(1 - \frac{r-1}{q-1}\frac{t_1}{\tau_1}\right) \doteq 41{,}9\,.$$

Náš taxík tedy ujel 41 celých úseků dlouhých s_0 a větší část dalšího úseku. Po tomto úseku jel po dobu $t - \tau$ rychlostí

$$v_{42} = \frac{s_0}{\tau_{42}} = \frac{v_1}{r^{41}}\,,$$

což znamená, že urazil celkovou dráhu

$$s = 41 s_0 + v_{42}(t - \tau) = v_1 \left(41 t_1 + \frac{t-\tau}{r^{41}}\right)\,.$$

Pro průměrnou rychlost v celé ujeté dráze nakonec dostáváme

$$\begin{aligned}
v &= \frac{s}{t} \\
&= \frac{v_1}{t}\left(41 t_1 + \frac{t-\tau}{r^{41}}\right) \\
&= v_1 \left[41(1-q) + \frac{1}{r^{41}}\left(1 + \frac{\tau_1 (r^{41}-1)(q-1)}{t_1 (r-1)}\right)\right] \\
&\doteq 75{,}5\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}\,.
\end{aligned}$$

Monika Drexlerová
monika.drexlerova@fykos.cz

Vojtěch David
vojtech.david@fykos.cz

Úloha 34 ... natlakovaná bublinka v oleji 5 bodů

Jakou dodatečnou silou bychom museli působit na píst, který vede do nádrže, v níž je malá bublinka vzduchu v oleji, aby se její poloměr zmenšil na polovinu? Píst má příčný průřez o ploše $S = 4{,}20\,\mathrm{cm}^2$. Pro jednoduchost předpokládejte, že v bublince byl původně vzduch za normálních podmínek a její poloměr byl $r = 0{,}420\,\mathrm{mm}$. Povrchové napětí oleje je $\sigma = 3{,}42 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$, olej dobře vede teplo a jeho teplota se v průběhu děje znatelně nemění.

Karel přemýšlel nad nežádoucí bublinkou.

Nemáme zadanú výšku piestu, ani nič podobné, čiže zanedbáme vplyvy hydrostatického tlaku (tie by sa aj tak zrejme vykrátili, pokiaľ sa bublinka nepresunula). Potom z Pascalovho zákona vyplýva, že tlak v oleji bude všade rovnaký a rovný tlaku od piestu $p = F/S$. Ak si teda označíme tlak oleja na začiatku p_1 a tlak oleja, ktorý potrebujeme dosiahnuť, aby sme stlačili bublinku na polovicu jej pôvodného polomeru p_2, tak (nakoľko plocha piestu sa nemení) je potrebná dodatočná sila rovná

$$\Delta F = S(p_2 - p_1)\,.$$

Lenže vnútri bublinky bude v dôsledku povrchového napätia oleja tlak iný. Konkrétne kapilárny tlak bubliny je

$$\Delta p_\mathrm{k} = \frac{2\sigma}{R}\,,$$

kde σ je povrchové napätie kvapaliny, z ktorej je bublina tvorená a R je polomer bubliny. Dôležitá poznámka: na internete pravdepodobne skôr narazíte na vzorec udávajúci 2-krát vyšší kapilárny tlak (čiže má koeficient 4 namiesto 2). To je ale vzorec pre bublinu v zmysle vzduch – blana – vzduch. Taká bublina má dva povrchy (vnútorný a vonkajší) a teda aj tlačí 2-krát silnejšie než „bublinka“, ktorá je vnútri tekutiny a teda je tlačená len jedným povrchom.

Vieme, že bublinka bola na začiatku v normálnych podmienkach, čiže v nej bol tlak p_A. Keďže poznáme jej počiatočný polomer a z neho vieme spočítať aj kapilárny tlak od bubliny, tak môžeme dopočítať počiatočný tlak v oleji ako

$$p_1 = p_{in1} - \Delta p_{k1} = p_\mathrm{A} - \frac{2\sigma}{r}\,.$$

Polomer bublinky na konci poznáme, čiže poznáme aj kapilárny tlak na konci. Zostáva nám už len dopočítať aký tlak musí v bublinke byť, aby sa tak stlačila. Zadanie píše, že olej dobre vedie teplo a jeho teplota sa v priebehu nemení, z čoho vyplýva, že ani teplota v bublinke sa nebude meniť. Ďalej je logickým predpokladom, že vzduch z nej neušiel nikam inam, čiže máme starý známy izotermický dej. Pri izotermickom deji sú tlak a objem nepriamo úmerné. Keď chceme bublinku stlačiť na polovičný polomer, znamená to, že jej objem klesne 8krát. Tým pádom v nej tlak narastie 8krát. Symbolicky

$$p_\mathrm{in} = \frac{C}{V} = \frac{C}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{C_2}{R^3}\,,$$

$$p_\mathrm{in1} = \frac{C_2}{r^3} = p_\mathrm{A}\,,$$

$$p_\mathrm{in2} = \frac{C_2}{(r/2)^3} = 8\frac{C_2}{r^3} = 8p_{in1} = 8p_\mathrm{A}\,.$$

Potrebný tlak v oleji je

$$p_2 = p_\mathrm{in2} - \Delta p_\mathrm{k2} = 8p_\mathrm{A} - \frac{2\sigma}{r/2} = 8p_\mathrm{A} - \frac{4\sigma}{r}\,,$$

čo už môžeme dosadiť do vzťahu pre dodatočnú silu

$$\Delta F = S(p_2 - p_1) = S\left(\left(8p_\mathrm{A} - \frac{4\sigma}{r}\right) - \left(p_\mathrm{A} - \frac{2\sigma}{r}\right)\right) = S\left(7p_\mathrm{A} - \frac{2\sigma}{r}\right) \doteq 298\,\mathrm{N}\,.$$

Môžeme si všimnúť, že veľkosť príspevku od kapilárneho tlaku je len $\Delta F_\mathrm{k} = 2S\sigma/r \doteq \doteq 0{,}7\,\mathrm{mN}$. Čiže celé povrchové napätie sme mohli ignorovať, čo sa celkom dalo čakať, nakoľko má olej povrchové napätie veľmi malé.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha 35 ... dramatický útěk

6 bodů

Marek utíká před svými povinnostmi přes most vysoký $H = 4{,}0\,\mathrm{m}$, ale zjišťuje, že je obklíčen. Chce proto skočit na loď o délce $L = 8{,}0\,\mathrm{m}$, jejíž příď právě vyplouvá zpod mostu a pluje dál rychlostí $v_\mathrm{l} = 5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jaký je rozdíl mezi maximálním a minimálním úhlem α, pod kterým může Marek skočit z mostu rychlostí $v = 8{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, aby dopadl na loď? Předpokládejte, že se Marek odráží směrem vzhůru a zanedbejte výšku lodi.

Marek je štvanec. Jarda po něm chce korektury seriálu.

Zavedeme si souřadnicový systém, který má svůj počátek ve výchozí poloze Marka, má osu x rovnoběžnou s dráhou lodi a osu y, která je na ni kolmá. Celý systém se pohybuje směrem i rychlostí shodnou s lodí. V tomto souřadnicovém systému se Markova poloha mění tak, že

$$x = (v\cos\alpha - v_\mathrm{l})\,t\,,$$
$$y = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\,,$$

kde α je úhel, pod kterým Marek skočil vůči ose x a t je čas od momentu výskoku. Vyjádřením t z první rovnice a dosazením do druhé dostaneme

$$y = \frac{xv\sin\alpha}{v\cos\alpha - v_\mathrm{l}} - \frac{gx^2}{2(v\cos\alpha - v_\mathrm{l})^2}\,,$$

což můžeme přepsat jako

$$y = \frac{xv\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{v\cos\alpha - v_\mathrm{l}} - \frac{gx^2}{2(v\cos\alpha - v_\mathrm{l})^2}\,.$$

Zavedeme substituci

$$\cos\alpha = k\,,$$
$$y = \frac{xv\sqrt{1-k^2}}{vk - v_\mathrm{l}} - \frac{gx^2}{2\,(vk - v_\mathrm{l})^2}\,.$$

Dostali jsme rovnici, kterou musíme řešit numericky (po roznásobení se vyskytují členy až k^4), dosadíme tedy za hodnoty $y = -H$ a $x = -L$ a využijeme numerický řešič. Dostaneme výsledné hodnoty pro k, resp. $\cos\alpha$

$$\cos\alpha_\mathrm{max} = 0.13012 \quad\Rightarrow\quad \alpha_\mathrm{max} = 82{,}52^\circ\,.$$

Tímto jsme dostali maximální úhel, pod kterým může Marek skočit.

Aby Marek skočil pod minimálním úhlem, musí dopadnout přesně na příď. Jeho rychlost, v našem souřadnicovém systému ve směru osy x, tedy musí být nulová

$$\cos\alpha_{\min} = \frac{v_1}{v} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\min} = 51{,}32\,^\circ\,.$$

Rozptyl úhlů, pod kterými může Marek skočit je tudíž

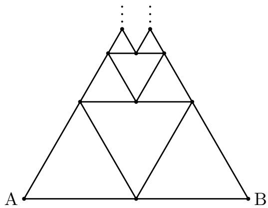
$$\Delta\alpha \doteq 31{,}2\,^\circ.$$

Radovan Lev
`radovan.lev@fykos.cz`

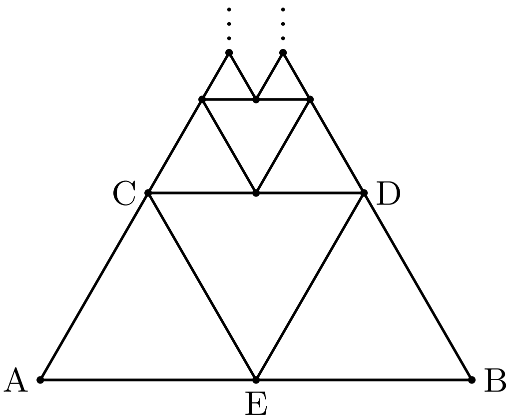
Úloha 36 ... nekonečný odpor II

6 bodů

Určete odpor nekonečné sítě drátů mezi body A a B. Trojúhelníky tvořící síť jsou rovnostranné a vzdálenost mezi body A a B je $a = 1{,}000\,000\,\mathrm{m}$. *Všechny dráty jsou stejného typu a mají měrný odpor* $\lambda = 1{,}000\,000\,\Omega\cdot\mathrm{m}^{-1}$. *Jindra se ztácí v drátech.*



Označíme bod vpravo nahoře od bodu A jako C, bod vlevo nahoře od bodu B jako D a bod v půli mezi body A a B jako E. Pokud bychom odstranili body A, B, E a jejich spojení, odpor mezi body C a D by byl poloviční oproti odporu R_{tot} mezi body A a B. To je díky tomu, že v trojúhelníku mezi body C a D mají všechny dráty poloviční délku, tudíž i poloviční odpor. Toho využijeme při výpočtu odporu mezi body A a B.



Obrázek 2: Vyznačení bodů C, D a E.

Uspořádání rezistorů v trojúhelnících ACE a BDE nahradíme uspořádáním do hvězdy. Vzhledem k tomu, že všechny rezistory mají stejný odpor $R = \lambda a/2$, má každé rameno hvězdy stejný odpor $R/3$. Odpor mezi body A a B je

$$
\begin{aligned}
R_{\mathrm{tot}} &= \frac{R}{3} + \frac{\frac{2R}{3}\left(\frac{2R}{3} + \frac{R_{\mathrm{tot}}}{2}\right)}{\frac{4R}{3} + \frac{R_{\mathrm{tot}}}{2}} + \frac{R}{3}\,,\\
R_{\mathrm{tot}}\left(\frac{4R}{3} + \frac{R_{\mathrm{tot}}}{2}\right) &= \frac{2R}{3}\left(\frac{4R}{3} + \frac{R_{\mathrm{tot}}}{2}\right) + \frac{2R}{3}\left(\frac{2R}{3} + \frac{R_{\mathrm{tot}}}{2}\right),\\
\frac{R_{\mathrm{tot}}^2}{2} + \frac{4R}{3}R_{\mathrm{tot}} &= \frac{8R^2}{9} + \frac{R}{3}R_{\mathrm{tot}} + \frac{4R^2}{9} + \frac{R}{3}R_{\mathrm{tot}}\,,\\
3R_{\mathrm{tot}}^2 + 4RR_{\mathrm{tot}} - 8R^2 = 0\,,\\
R_{\mathrm{tot}} &= \frac{-4R \pm \sqrt{16R^2 + 96R^2}}{6} = \frac{2}{3}R\left(-1 \pm \sqrt{7}\right)\,.
\end{aligned}
$$

Fyzikální řešení má jedině kladné řešení. Dosaďme tedy za R, čímž získáme výsledek

$$
R_{\mathrm{tot}} = \left(\sqrt{7} - 1\right)\frac{2R}{3} = \left(\sqrt{7} - 1\right)\frac{\lambda a}{3} \doteq 0{,}548\,583\,8\,\Omega.
$$

Odpor tohoto nekonečného obvodu mezi body A a B tedy je zhruba $0{,}548\,583\,8\,\Omega$.

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha 37 ... dipól na pružině 5 bodů

Uvažujme dvě nabité částice, které spolu tvoří elektrický dipól o momentu $p_0 = 2{,}20\cdot 10^{-25}\,\mathrm{C\cdot m}$. *Systém se nachází ve svém energetickém minimu, kdy jsou částice od sebe vzdáleny* $l_0 = 3{,}10\,\mathrm{nm}$. *Při vychýlení se chovají, jako kdyby mezi nimi byla pružina o tuhosti* $k = 4{,}80\,\mathrm{mN\cdot m^{-1}}$. *Jaký by byl moment dipólu, pokud by se pohyboval rychlostí* $v = 28{,}0\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ *kolmo na směr svého dipólového momentu v homogenním magnetickém poli o indukci* $B = 250\,\mathrm{mT}$, *které je kolmé jak na vektor rychlosti dipólu, tak i na směr dipólového momentu? Zadejte nejvyšší možnou hodnotu.* *Jarda se v magnetickém poli mění.*

Pro hodnotu elektrického dipólu mimo magnetické pole uvažujme vztah

$$
p_0 = ql_0\,,
$$

kde $q = 7{,}1\cdot 10^{-17}\,\mathrm{C}$ je velikost nábojů částic.

V magnetickém poli na každý náboj působí také magnetická síla o velikosti Bvq, kde q je náboj částice. Znaménko u náboje je pro částice různé, ale vektor rychlosti i magnetické indukce a velikost náboje je pro obě částice stejná. Proto na každý náboj působí síla opačným směrem. Z rovnosti sil na pružině tak dostáváme

$$
k\left(l_{\mathrm{m}} - l_0\right) = \pm Bvq\,,
$$

kde znaménko závisí na tom, v jakém směru vůči magnetickému poli se náboje pohybují. Veličina l_{m} označuje vzdálenost mezi částicemi při pohybu v magnetickém poli. Pokud si zavedeme orientaci tak, že vektor B míří do osy z, vektor rychlosti do osy x a v pravotočivém kartézském systému je kladný náboj na kladné y-ové souřadnici. Takže je v rovnici znaménko − (magnetická síla tlačí náboje k sobě), v opačném případě je + (magnetické síla působí proti přitažlivé elektrické).

Celá úloha se nyní ptá na velikost součinu $p_\mathrm{m} = ql_\mathrm{m}$. Protože chceme znát maximální možné řešení, potřebujeme, aby magnetická síla tlačila magnety od sebe, tedy aby jejich vzdálenost byla co největší. Budeme proto dále v předchozí rovnici uvažovat pouze znaménko +.

Vyjádříme l_m jako

$$l_\mathrm{m} = \frac{Bvq}{k} + l_0 \,,$$

což můžeme vynásobit velikostí náboje q, abychom dostali hledaný dipólový moment

$$p_\mathrm{m} = \frac{Bvq^2}{k} + p_0 = \frac{Bvp_0^2}{kl_0^2} + p_0 = 2{,}27 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{C{\cdot}m}\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 38 ... neteče teplá voda

6 bodů

Petr si na FYKOSím výjezdu o půlnoci vlezl do sprchy. V momentě, kdy pustil vodu, se zapnul bojler o objemu $V = 100\,\mathrm{l}$ plný vody a začal ohřívat svůj obsah. Během toho z něj však každou sekundu odtéká voda do sprchy rychlostí $Q = 0{,}1\,\mathrm{l{\cdot}s^{-1}}$ a stejnou rychlostí do bojleru vtéká studená voda z rozvodu. Teplota studené vody z rozvodu $T_\mathrm{s} = 20\,\mathrm{°C}$ je shodná s počáteční teplotou vody v bojleru. Za jak dlouho se bude moci Petr sprchovat vodou o teplotě $T_\mathrm{k} = 40\,\mathrm{°C}$? Bojler má výkon $P = 15\,\mathrm{kW}$. Uvažujte, že voda se po přitečení do bojleru dokonale promísí.

Petr není otužilec.

Kromě ohřevu výkonem P je objem V chlazen přitékající vodou, což můžeme chápat tak, že mu voda ubírá teplo chladivým výkonem P_ch

$$P_\mathrm{ch} = -Q\rho c\left(T - T_\mathrm{s}\right)\,,$$

kde T je teplota vody v bojleru, ρ hustota vody a c její měrná tepelná kapacita. Bojler je naopak ohříván výkonem P.

Teplo uchované v bojleru můžeme vyjádřit jako $\tau = V\rho cT$. Změna tepla za jednotku času je tedy přímo úměrná změně teploty jako

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = V\rho c\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\,,$$

což se rovná celkovému tepelnému výkonu. Platí tedy

$$V\rho c\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = P - Q\rho c\left(T - T_\mathrm{s}\right)\,,$$

což je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými pro proměnnou T v závislosti na čase t. Jejím obecným řešením je

$$T = \frac{1}{Q\rho c}\left(P - \exp\left(-\frac{Q}{V}\left(t + k\right)\right)\right) + T_\mathrm{s}\,.$$

Dosazením počáteční podmínky $T(0) = T_\mathrm{s}$ dostáváme pro konstantu k

$$c = -\frac{V}{Q} \ln P \,,$$

tedy partikulárním řešením rovnice je

$$T = \frac{P}{Q\rho c} \left(1 - \exp\left(-\frac{Q}{V} t\right)\right) + T_\mathrm{s} \,.$$

Čas t_k bude v momentě, kdy voda dosáhne požadované teploty $T_\mathrm{k} = 40\,{}^\circ\mathrm{C}$. Dosazením a několika úpravami dostáváme

$$t_\mathrm{k} = -\frac{V}{Q} \ln \left(1 - \frac{Q\rho c}{P} \left(T_\mathrm{k} - T_\mathrm{s}\right)\right) .$$

Po dosazení číselných hodnot získáváme

$$t_\mathrm{k} \doteq 8{,}0 \cdot 10^2\,\mathrm{s} \,,$$

Petr si tedy na teplou vodu počká déle než třináct minut.

Petr Sacher
`petr.sacher@fykos.cz`

Úloha 39 ... přelévací hodiny 6 bodů

Uvažujme přesýpací hodiny, které ale místo písku mají vodu. Vrcholový úhel je $40\,{}^\circ$ a mezera mezi komorami má průměr $2{,}0\,\mathrm{mm}$. Jaký musí být objem jedné komory, aby se při kompletním zaplnění vodou při otočení vyprázdnila za čas $2\,\mathrm{min}$? Celý dvojkužel je rotačně symetrický, obě komory jsou bokem propojené tenkou trubičkou, aby tlak plynů uvnitř nehrál roli. Neuvažujte povrchové napětí vody a předpokládejte, že spojnice komor je malá vůči ostatním rozměrům.

Jarda zužitkoval návrh Aničky K.

Označme si výšku h vodní hladiny nad otvorem, když jsou hodiny ve svislé poloze. Pak je výtoková rychlost podle Toricelliho vztahu

$$v = \sqrt{2gh} \,.$$

Objemový průtok otvorem o průměru d je následně

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} v = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gh} \,,$$

závisí tedy na výšce vodní hladiny nad otvorem.

Jak se mění objem vody v horní polovině hodin? V závislosti na výšce h je její objem

$$V(h) = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \left(h \operatorname{tg} \alpha\right)^2 h \,,$$

kde jsme poloměr kuželu v závislosti na h určili pomocí vrcholového úhlu jako $r = h \operatorname{tg} \alpha$, přičemž $\alpha = 20\,{}^\circ$ je polovina vrcholového úhlu. Změna tohoto objemu za jednotku času je

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{3} \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{\mathrm{d}h^3}{\mathrm{d}t} = \pi \operatorname{tg}^2 \alpha h^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \,.$$

Tuto veličinu popisuje již nalezený objemový průtok – je to objem, který vyteče z horní části za jednotku času. Porovnejme obě tyto veličiny

$$Q = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2gh} = -\pi \operatorname{tg}^2 \alpha h^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\,,$$

kde záporné znaménko značí, že se objem vody v horní části snižuje. Dostali jsme tedy diferenciální rovnici, kterou vyřešíme separací proměnných

$$\frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2g}\,\mathrm{d}t = -\pi \operatorname{tg}^2 \alpha h^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}h\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\sqrt{2g}}{4\operatorname{tg}^2\alpha}t + C = -\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}}\,,$$

kde konstantu C určíme z počáteční podmínky. Ta nám říká, že v čase $t = 0$ je výška v kuželu maximální, označme ji jako H. Pak tedy dostáváme $C = -\frac{2}{5}H^{\frac{5}{2}}$.

V poslední části přicházíme k tomu, že nám nezbyla žádná voda v kuželu, a tedy $h = 0$. To se stalo za čas $\tau = 2\,\mathrm{min}$, který známe ze zadání. Dosaďme tyto hodnoty za t a h do naší rovnice a dostaneme

$$H = \left(\frac{5\,\mathrm{d}^2\sqrt{2g}}{8\operatorname{tg}^2\alpha}\tau\right)^{\frac{2}{5}} \doteq 16\,\mathrm{cm}\,.$$

My však hledáme potřebný objem jedné komory, ten už je ale jednoduše

$$V_\mathrm{k} = \frac{\pi}{3}\left(H\operatorname{tg}\alpha\right)^2 H \doteq 550\,\mathrm{ml}\,.$$

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha 40 ... usměrněná účinnost 6 bodů

Máme sestavený Graetzův můstek s diodami. Ty fungují tak, že nepropouští žádný proud až do chvíle, kdy napětí dosáhne hodnoty $U_\mathrm{min} = 0{,}62\,\mathrm{V}$, a potom je naopak úbytek proudu (a tedy odpor diody) zanedbatelný. Jakou maximální účinnost (v %) může mít spotřebič připojený k usměrněnému střídavému proudu z tohoto můstku, pokud používáme harmonický zdroj s maximálním napětím $U_\mathrm{max} = 1{,}5\,\mathrm{V}$? Účinnost porovnáváme vůči maximální účinnosti bez můstku s diodami. *Karel přemýšlel nad střídavým proudem.*

Maximálního výkonu spotřebič dosáhne, pokud bude jeho účiník $\cos\varphi = 1$, tedy v případě, že se bude chovat jako ideální rezistor. Maximální účinnost tedy bude poměr příkonu odebíraného spotřebičem a celkového příkonu přiváděného k můstku. Zároveň předpokládáme, že příkon odebíraný spotřebičem je i jeho výkon (to může platit např. pro topení).

Vzhledem k tomu, že jde o usměrňovací můstek, je perioda výkonu na spotřebiči poloviční oproti periodě zdroje, kterou označíme jako T. Stačí se tedy dívat pouze na časové období od $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ do $t_3 = T/2$.

Střední hodnotu příkonu zdroje můžeme psát jako

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \frac{\int_{t_0}^{t_3} U_{\max} I_{\max} \sin^2 \frac{2\pi t}{T}\,\mathrm{d}t}{\frac{T}{2}} = U_{\max} I_{\max} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 x dx \\ &= U_{\max} I_{\max} \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2}\left(x - \sin x \cos x\right)\right]_{x=0}^{\pi} = \frac{U_{\max} I_{\max}}{2}\,,\end{aligned}$$

kde jsme využili substituci $x = 2\pi t/T$, $\mathrm{d}t = T/(2\pi)\,\mathrm{d}x$.

V okamžicích, kdy je napětí nižší než $U_{\min}$, je výkon nulový a jinak je stejný jako v předchozím případě. Z toho získáme časy, přes které budeme integrovat a které označíme t_1 a t_2,

$$2\pi \frac{t_1}{T} = \arcsin \frac{U_{\min}}{U_{\max}} \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{U_{\min}}{U_{\max}} \doteq 0{,}067\,8T\,,$$

$$t_2 = \frac{T}{2} - t_1 = \frac{T}{2}\left(1 - \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{U_{\min}}{U_{\max}}\right) \doteq 0{,}432T\,.$$

Střední hodnotu příkonu spotřebiče můžeme určit jako

$$\bar{w}_{\mathrm{G}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} U_{\max} I_{\max} \sin^2 \frac{2\pi t}{T}\,\mathrm{d}t}{\frac{T}{2}}\,.$$

Maximální účinnost je pak

$$\eta = \frac{\bar{w}_{\mathrm{G}}}{\bar{w}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} U_{\max} I_{\max} \sin^2 \frac{2\pi t}{T}\,\mathrm{d}t}{\frac{T}{2} \frac{U_{\max} I_{\max}}{2}}\,.$$

Maximální napětí a proud můžeme vytknout a výsledek tak bude záviset jen na integraci času, resp. substituované veličiny x,

$$\eta = \frac{4}{T} \int_{t_1}^{t_2} \sin^2 \frac{2\pi t}{T}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_{\arcsin \frac{U_{\min}}{U_{\max}}}^{\pi - \arcsin \frac{U_{\min}}{U_{\max}}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x \doteq 0{,}968 = 96{,}8\,\%\,.$$

Maximální účinnost s můstkem je tedy zhruba 96,8 % maximální možné účinnosti.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha 41 ... všechno stejné — 6 bodů

Představte si, že existuje planeta, na které siderický den trvá stejně dlouho jako na Zemi. Na rovnoběžce, na které se na Zemi nachází Praha, je také stejná velikost tíhového zrychlení. Poloměr planety je však desetkrát větší než ten zemský. Jaká je její průměrná hustota? Obě planety považujte za dokonalé homogenní koule. *Jarda byl ve špatné učebně, ale nepoznal to.*

Tíhová síla je vektorovým součtem gravitační a odstředivé síly. Velikost gravitační síly je

$$F_{\mathrm{G}} = \frac{MmG}{R^2} = \frac{4\pi R\rho}{3} Gm\,,$$

kde M je hmotnost planety, m hmotnost daného člověka, G gravitační konstanta, R poloměr planety a ρ její průměrná hustota. Směr působení je do středu planety.

Velikost odstředivé síly na padesáté rovnoběžce (kde leží Praha) pak je

$$F_\mathrm{o} = m\omega^2 r = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R\cos 50^\circ\,,$$

kde ω je úhlová rychlost rotace, $T = 86\,164\,\mathrm{s}$ je délka siderického dne a r je vzdálenost od osy otáčení pro bod na padesáté rovnoběžce.

Velikost tíhového zrychlení lze v obou případech psát pomocí kosinové věty jako

$$g = \frac{1}{m}\sqrt{F_\mathrm{G}^2 + F_\mathrm{o}^2 - 2F_\mathrm{G}F_\mathrm{o}\cos 50^\circ}\,.$$

Dále budeme indexem $\oplus$ označovat parametry Země a indexem p parametry planety, pokud budou vzájemně rozdílné (tedy poloměr a hustotu). Z rovnosti velikosti tíhového zrychlení dostáváme rovnici

$$F_{\mathrm{G}\oplus}^2 + F_{\mathrm{o}\oplus}^2 - 2F_{\mathrm{G}\oplus}F_{\oplus}\cos 50^\circ = F_{\mathrm{Gp}}^2 + F_{\mathrm{op}}^2 - 2F_{\mathrm{Gp}}F_{\mathrm{op}}\cos 50^\circ\,.$$

Dosazením za síly a po několika úpravách dostaneme

$$\left(\frac{R_\oplus}{R_\mathrm{p}}\right)^2\left(\left(\frac{4\pi\rho_\oplus}{3}G\right)^2 + \cos^2 50^\circ\left(\left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 - \frac{32\pi^3\rho_\oplus}{3T^2}G\right)\right) =$$
$$= \left(\frac{4\pi\rho_\mathrm{p}}{3}G\right)^2 + \left(\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cos 50^\circ\right)^2 - \frac{32\pi^3\rho_\mathrm{p}}{3T^2}G\cos^2 50^\circ\,.$$

Levou stranu rovnice známe, dále ji označme jako L. Pro vyčíslení výsledku tuto konstantu napíšeme pomocí údajů dostupných v seznamu konstant jako

$$L = \left(\frac{R_\oplus}{R_\mathrm{p}}\right)^2\left(\left(\frac{M_\oplus}{R_\oplus^3}G\right)^2 + \cos^2 50^\circ\left(\left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 - \frac{8\pi^2 M_\oplus}{R_\oplus^3 T^2}G\right)\right) = 2{,}354\,80\cdot 10^{-14}\,\mathrm{s}^{-1}\,.$$

Z předchozí rovnice hledáme pouze ρ_p, které se na pravé straně vyskytuje v kvadrátu. Rovnici upravíme do tvaru

$$\left(\frac{4\pi}{3}G\right)^2\rho_\mathrm{p}^2 - \frac{32\pi^3 G\cos^2 50^\circ}{3T^2}\rho_\mathrm{p} - \left(L - \left(\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cos 50^\circ\right)^2\right) = 0\,,$$

odkud již jako řešení kvadratické rovnice dostáváme

$$\rho_\mathrm{p} = 3\frac{4\pi^2\cos^2 50^\circ + \sqrt{16\pi^4\cos^4 50^\circ + T^4\left(L - \left(\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cos 50^\circ\right)^2\right)}}{4G\pi T^2} = 557\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}\,,$$

přičemž jsme ve vzorci zvolili znaménko +, aby hustota vyšla jako kladné číslo.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha 42 ... zavěšená

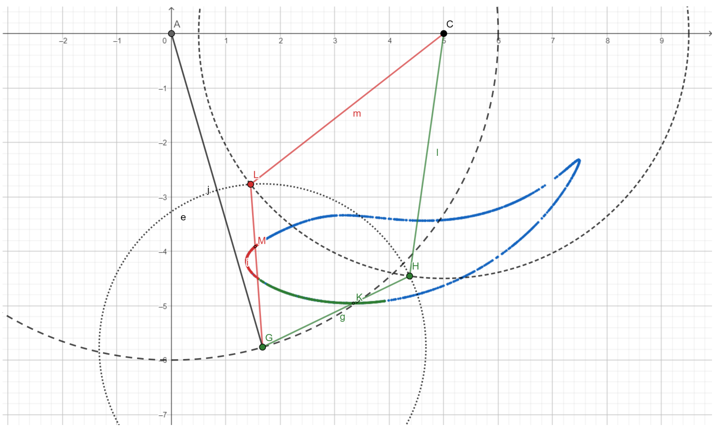
6 bodů

Mějme dva body závěsu ve stejné výšce ve vzdálenosti $d = 50{,}0\,\mathrm{cm}$ *od sebe. Na jeden zavěsíme závaží o hmotnosti* $m_1 = 1{,}30\,\mathrm{kg}$ *na závěse délky* $l_1 = 60{,}0\,\mathrm{cm}$. *Na druhý zavěsíme závaží o hmotnosti* $m_2 = 2{,}10\,\mathrm{kg}$ *na závěse délky* $l_2 = 45{,}0\,\mathrm{cm}$. *Obě závaží následně spojíme lankem o délce* $l = 30{,}0\,\mathrm{cm}$. *V jaké hloubce pod rovinou závěsu se bude nacházet lehčí závaží?*

Dodo věšel prádlo.

Závažia sa ustália v rovnovážnej polohe, ktorá minimalizuje súčet ich potenciálnych energií. To nastáva práve vtedy, keď sa ich ťažisko nachádza v najnižšej možnej polohe. Akákoľvek výchylka niektorého zo závaží zo zvislej roviny danej bodmi úchytu zrejme túto energiu zvyšuje. Z tohoto dôvodu riešime 2D problém, v ktorom minimalizujeme výšku bodu medzi závažiami vo vzdialenosti $lm_2/(m_1 + m_2)$ od závažia 1. Túto úlohu je možné riešiť výpočtom, avšak ten vedie na minimalizáciu zložitého výrazu, ktorú je nutné riešiť numericky.

Začnime numerickým riešením už na začiatku – celú úlohu si prekreslíme do Geogebry. Na obrázku 3 sú body A a C body závesu, G a H sú závažia a K je ťažisko. Body G a H musia byť v minime na napnutých závesoch, teda na kružniciach s príslušnými polomermi. Pre daný bod G označujúci polohu ľahšieho závažia zostrojíme kružnicu s polomerom l, a potom jej priesečník s kružnicou (C, l_2) definuje polohu H ťažšieho závažia. Tieto priesečníky môžu byť však dva, dostávame teda aj druhé riešenie (červenou).[3] Veľkou výhodou Geogebry je, že takto zostrojeným obrázkom je možné hýbať. Pri pohybe bodom G a zapnutými stopami ťažiska si môžme všimnúť, že množina všetkých možných bodov ťažiska má komplikovaný tvar. Nás zaujíma konštrukcia s ťažiskom ležiacim čo najnižšie – vo vzdialenosti $t = 49{,}6\,\mathrm{cm}$ pod rovinou závesu, pri ktorej je bod G v hĺbke $h_1 = 57{,}7\,\mathrm{cm}$ pod závesom.



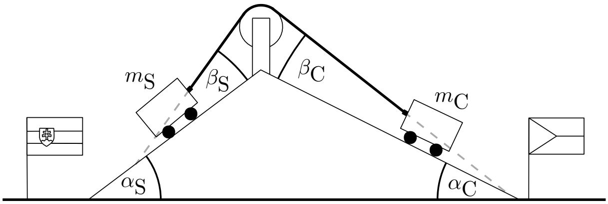
Obrázek 3: Překreslení úlohy v Geogebře

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

[3] Modrou farbou sú vyznačené polohy ťažiska pre bod H napravo od závesu C, teda očividne nie v konfigurácii odpovedajúcej minimálnej energii, keďže $l < d$.

Úloha 43 ... hraniční kopec s rozhlednou 7 bodů

Lego byl na rozhledně mezi Českem a Slovenskem. Představil si, že by na rozhledně zavěsil kladku, přes kterou by přehodil lano, na jehož koncích by byly vozíky s hmotnostmi $m_\mathrm{C} = 24\,\mathrm{kg}$ (ten dal na českou stranu) a $m_\mathrm{S} = 15\,\mathrm{kg}$ (na slovenskou). Kopec má na slovenské straně sklon $\alpha_\mathrm{S} = 10^\circ$, na české $\alpha_\mathrm{C} = 14^\circ$ a lano svírá s kopcem úhly $\beta_\mathrm{S} = 15^\circ$ a $\beta_\mathrm{C} = 11^\circ$. Jaké bude zrychlení vozíku na slovenské straně, pokud zanedbáme všechna tření? Pokud vozík směřuje nahoru k Česku, zadejte kladnou hodnotu, pokud dolů, zápornou. Kladka i lano jsou nehmotné a lano dokonale nepružné.



Obrázek 4: Schéma kopce.

Lego si samozřejmě představil vozidla ze soustředění.

V smere rovnobežnom s kopcom má tiaž slovenského vozíka zložku $m_\mathrm{S} g \sin\alpha_\mathrm{S}$. Ak označíme ťahovú silu lana ako T, jej projekcia do smeru rovnobežného s kopcom bude $T\cos\beta_\mathrm{S}$. Na českej strane situácia prebieha obdobne. Pre zrýchlenia v smere rovnobežnom s kopcom, označené ako a_S a a_C (obe s kladným smerom nahor), dostávame pohybové rovnice

$$m_\mathrm{S} a_\mathrm{S} = T\cos\beta_\mathrm{S} - m_\mathrm{S} g \sin\alpha_\mathrm{S}$$
$$m_\mathrm{C} a_\mathrm{C} = T\cos\beta_\mathrm{C} - m_\mathrm{C} g \sin\alpha_\mathrm{C}\,.$$

Okrem neznámych zrýchlení sa v rovniciach objavuje aj ťahová sila lana, ktorú potrebujeme určiť. Tretia rovnica vyplýva z nepružnosti lana: lano sa nemôže predĺžiť ani skrátiť, čo znamená, že ostáva napnuté. Ak sa vozík na slovenskej strane posunie o malé $\mathrm{d}x_\mathrm{S}$ nahor po svahu, dĺžka lana sa na slovenskej strane zníži. O koľko? Môžeme využiť postup podobný difrakcii na mriežke. Pri dostatočne malom posune sa smer lana prakticky nezmení, takže dĺžka na tejto strane klesne o projekciu posunu $\mathrm{d}x_\mathrm{S}$ do smeru lana, teda o $\mathrm{d}x_\mathrm{S}\cos\beta_\mathrm{S}$. K rovnakému výsledku dospejeme aj pomocou kosínusovej vety. Ak označíme pôvodnú dĺžku lana ako l_S, nová dĺžka bude kratšia o:

$$l_\mathrm{S} - \sqrt{l_\mathrm{S}^2 + \mathrm{d}x_\mathrm{S}^2 - 2 l_\mathrm{S}\,\mathrm{d}x_\mathrm{S}\cos\beta_\mathrm{S}} \approx l_\mathrm{S} - l_\mathrm{S}\sqrt{1 - 2\frac{\mathrm{d}x_\mathrm{S}}{l_\mathrm{S}}\cos\beta_\mathrm{S}} \approx \mathrm{d}x_\mathrm{S}\cos\beta_\mathrm{S}\,,$$

kde nás zaujímal iba rozvoj do prvého rádu.

Na českej strane dostaneme rovnaký výsledok. Z nepružnosti platí, že zmena dĺžky lana na jednej strane je rovná mínus zmene dĺžky na druhej strane, takže $\mathrm{d}x_\mathrm{S}\cos\beta_\mathrm{S} = -\,\mathrm{d}x_\mathrm{C}\cos\beta_\mathrm{C}$. Po dvoch deriváciách tohto vzťahu podľa času dostaneme rovnosť pre zrýchlenia

$$a_\mathrm{S}\cos\beta_\mathrm{S} = -a_\mathrm{C}\cos\beta_\mathrm{C}\,.$$

Toto je tretia rovnica, ktorú sme potrebovali na vyriešenie sústavy.

Následne vynásobíme prvú pohybovú rovnicu $\cos\beta_\mathrm{C}/\cos\beta_\mathrm{S}$ a odčítame ju od druhej, aby sme eliminovali T:

$$m_\mathrm{C}a_\mathrm{C} - m_\mathrm{S}a_\mathrm{S}\frac{\cos\beta_\mathrm{C}}{\cos\beta_\mathrm{S}} = m_\mathrm{S}g\sin\alpha_\mathrm{S}\frac{\cos\beta_\mathrm{C}}{\cos\beta_\mathrm{S}} - m_\mathrm{C}g\sin\alpha_\mathrm{C}\,.$$

Potom už len dosadíme za a_C z rovnice odvodenej z nepružnosti lana, teda $a_\mathrm{C} = -a_\mathrm{S}\frac{\cos\beta_\mathrm{S}}{\cos\beta_\mathrm{C}}$, a doriešime

$$-m_\mathrm{C}a_\mathrm{S}\frac{\cos\beta_\mathrm{S}}{\cos\beta_\mathrm{C}} - m_\mathrm{S}a_\mathrm{S}\frac{\cos\beta_\mathrm{C}}{\cos\beta_\mathrm{S}} = m_\mathrm{S}g\sin\alpha_\mathrm{S}\frac{\cos\beta_\mathrm{C}}{\cos\beta_\mathrm{S}} - m_\mathrm{C}g\sin\alpha_\mathrm{C}$$

$$a_\mathrm{S} = g\frac{m_\mathrm{C}\sin\alpha_\mathrm{C} - m_\mathrm{S}\sin\alpha_\mathrm{S}\frac{\cos\beta_\mathrm{C}}{\cos\beta_\mathrm{S}}}{m_\mathrm{C}\frac{\cos\beta_\mathrm{S}}{\cos\beta_\mathrm{C}} + m_\mathrm{S}\frac{\cos\beta_\mathrm{C}}{\cos\beta_\mathrm{S}}} = 0{,}80\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Zostáva však dôležitý detail. Predpokladali sme, že vozíky budú zrýchľovať smerom kopca, no teoreticky im nič nebráni zrýchliť smerom nahor. Ak by bol na jednej strane vozík veľmi ťažký a na druhej bol uhol β dostatočne veľký, mohol by sa vozík zdvihnúť zo zeme. Ako to zistíme? Spočítame projekcie tiažovej a ťahovej sily pôsobiacej na vozík do smeru kolmého ku kopcu. Ak bude táto projekcia smerovať nadol, vozík tlačí na zem, a tá naňho pôsobí reakciou, takže sa bude pohybovať, ako sme predpokladali. Naopak, ak by to bolo inak, náš predpoklad bol nesprávny a pohyb by bol odlišný.

Vypočítajme ťahovú silu T spätne dosadením do jednej z pohybových rovníc:

$$m_\mathrm{S}g\frac{m_\mathrm{C}\sin\alpha_\mathrm{C} - m_\mathrm{S}\sin\alpha_\mathrm{S}\frac{\cos\beta_\mathrm{C}}{\cos\beta_\mathrm{S}}}{m_\mathrm{C}\frac{\cos\beta_\mathrm{S}}{\cos\beta_\mathrm{C}} + m_\mathrm{S}\frac{\cos\beta_\mathrm{C}}{\cos\beta_\mathrm{S}}} = T\cos\beta_\mathrm{S} - m_\mathrm{S}g\sin\alpha_\mathrm{S}\,,$$

$$m_\mathrm{S}g\left(\frac{m_\mathrm{C}\sin\alpha_\mathrm{C} - m_\mathrm{S}\sin\alpha_\mathrm{S}\frac{\cos\beta_\mathrm{C}}{\cos\beta_\mathrm{S}}}{m_\mathrm{C}\frac{\cos^2\beta_\mathrm{S}}{\cos\beta_\mathrm{C}} + m_\mathrm{S}\cos\beta_\mathrm{C}} + \frac{\sin\alpha_\mathrm{S}}{\cos\beta_\mathrm{S}}\right) = T\,,$$

$$m_\mathrm{S}g\frac{m_\mathrm{C}\sin\alpha_\mathrm{C} + m_\mathrm{C}\sin\alpha_\mathrm{S}\frac{\cos\beta_\mathrm{S}}{\cos\beta_\mathrm{C}}}{m_\mathrm{C}\frac{\cos^2\beta_\mathrm{S}}{\cos\beta_\mathrm{C}} + m_\mathrm{S}\cos\beta_\mathrm{C}} = T\,,$$

$$m_\mathrm{S}m_\mathrm{C}g\frac{\sin\alpha_\mathrm{C}\cos\beta_\mathrm{C} + \sin\alpha_\mathrm{S}\cos\beta_\mathrm{S}}{m_\mathrm{C}\cos^2\beta_\mathrm{S} + m_\mathrm{S}\cos^2\beta_\mathrm{C}} = T\,.$$

Zložka tejto sily v smere normály k zemi je na slovenskej strane $T\sin\beta_\mathrm{S}$ (s kladným smerom „nahor“). Zložka tiaže v tomto smere je $-m_\mathrm{S}g\cos\alpha_\mathrm{S}$. Súčet týchto síl je

$$m_\mathrm{S}m_\mathrm{C}g\sin\beta_\mathrm{S}\frac{\sin\alpha_\mathrm{C}\cos\beta_\mathrm{C} + \sin\alpha_\mathrm{S}\cos\beta_\mathrm{S}}{m_\mathrm{C}\cos^2\beta_\mathrm{S} + m_\mathrm{S}\cos^2\beta_\mathrm{C}} - m_\mathrm{S}g\cos\alpha_\mathrm{S} = -135\,\mathrm{N}\,,$$

teda záporný, čo znamená, že vozík tlačí na zem. Vozík na českej strane zrýchľuje dole kopcom, čo naznačuje, že lano ho nezdvihne nad zem, čo si možno overiť analogickým výpočtom. Výsledok tak zodpovedá výpočtu vyššie, teda

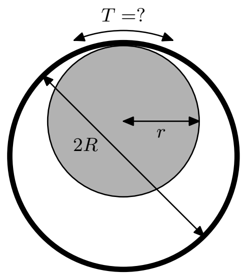
$$a_\mathrm{S} = 0{,}80\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha 44 ... netěsný prsten

6 bodů

Na upevněnou vodorovnou tyčku s kruhovým průřezem o poloměru $r = 2{,}0\,\mathrm{cm}$ navlékneme tenký prsten o poloměru $R = 5{,}0\,\mathrm{cm}$. Určete periodu malých kmitů po vychýlení z rovnovážné polohy. Prsten vůči tyči neprokluzuje. *Jarda už myslí na svatbu.*



Úloha na první pohled nemusí být úplně přímočará, protože bod dotyku většího prstenu s menším se v rámci jednoho kmitu mění. Není proto zřejmé, jak přesně se pohybuje těžiště prstenu a jak rychle se vůči svému těžišti prsten otáčí. Nejprve tedy popíšeme pohyb prstenu.

Uvažujme bod dotyku obou předmětů, který je odchýlen od svislice o úhel φ, který je měřený od středu tyčky. Střed prstenu musí ležet na spojnici oného bodu dotyku a právě středu tyčky, protože se jedná o dvě dotýkající se kružnice. Střed prstenu tedy leží ve vzdálenosti $R - r$ od středu tyčky. Tato vzdálenost je ale nezávislá od úhlu φ. Střed prstenu se tedy pro libovolné φ nachází na kružnici s poloměrem $R - r$. Pro popis rychlosti těžiště prstenu zaveďme $\dot{\varphi}$, časovou derivaci úhlového vychýlení z rovnovážné polohy. Pak rychlost těžiště prstenu je jednoduše

$$v_\mathrm{T} = (R - r)\,\dot{\varphi}\,.$$

Dále se prsten otáčí okolo své osy. Není to ale stejnou úhlovou rychlostí, jakou se otáčí jeho těžiště okolo středu tyče. Platí totiž podmínka, že se větší prsten odvaluje po povrchu menšího. Bod dotyku musí na větším prstenu urazit stejnou vzdálenost jako na menším válci. Jestliže se naším válci posune bod dotyku o $\Delta\varphi$, na něm je to jednoduše $r\Delta\varphi$. U středu prstenu ale tato vzdálenost znamená pouze úhel $\Delta\varphi r/R$, a úhel, o který se prsten posune, je proto jen $\Phi = \varphi - \varphi r/R$. Úhlová rychlost rotace prstenu je tak

$$\dot{\Phi} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)\dot{\varphi}\,.$$

Popsali jsme pohyb prstenu po válci. Periodu malých kmitů najdeme z bilance kinetické a potenciální energie. Kinetická je součtem translační energie těžiště válce a jeho rotační

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv_\mathrm{T}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\Phi}^2 = \frac{1}{2}\left(m\,(R-r)^2\,\dot{\varphi}^2 + mR^2\left(1 - \frac{r}{R}\right)^2\dot{\varphi}^2\right) = \frac{1}{2}2m\,(R-r)^2\,\dot{\varphi}^2\,.$$

Potenciální energie také závisí na úhlu, a to podle polohy těžiště prstenu jako

$$E_\mathrm{p} = mg\,(R-r)\,(1-\cos\varphi) \approx \frac{1}{2}\varphi^2 mg\,(R-r)\;,$$

kde jsme provedli přiblížení malých kmitů, kdy v okolí $\varphi = 0$ můžeme přibližně psát $\cos\varphi \approx \approx 1 - \varphi^2/2$. Vidíme tedy, že potenciální energie roste s kvadrátem souřadnice, zatímco kinetická energie je úměrná kvadrátu derivace této souřadnice. Tato situace je zcela analogická pohybu v harmonickém oscilátoru, pouze místo polohy x je zde úhel φ a jsou zde jiné konstanty úměrnosti.

Jestliže je energie v harmonickém oscilátoru

$$E_\mathrm{LHO} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

a perioda oscilací

$$T_{\mathrm{LHO}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,,$$

pak v našem systému je energie

$$E = \frac{1}{2}2m\left(R-r\right)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mg\left(R-r\right)\varphi^2\,,$$

takže perioda je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2m\left(R-r\right)^2}{mg\left(R-r\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\left(R-r\right)}{g}} = 0{,}49\,\mathrm{s}\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 45 ... dvojité detekce — 7 bodů

Jindra měří rozpady radioaktivního izotopu pomocí detektoru citlivého na energii. Ví, že jeden rozpad uvolní energii E. Za čas měření $T = 300\,\mathrm{s}$ detekoval $N_1 = 9\,728\,350$ událostí s energií E a $N_2 = 166\,545$ událostí s energií $2E$. Počet událostí s energií $3E$ nebo vyšší byl zanedbatelný. Částicové detektory mají tzv. mrtvou dobu, během které zpracovávají signál z předešlé částice. Konkrétně Jindrův detektor zaznamenává i částice přilétnuvší v mrtvé době, nedokáže je ale detekovat jako samostatné částice a přičte místo toho jejich energii k první částici. Jaká je mrtvá doba Jindrova detektoru? *Jindra počítá rozpady.*

Mrtvá doba, během které detektory zpracovávají signál z předešlé částice, se může projevit různě, například detektor vůbec nemusí být schopen přijímat další signály a všechny události proběhlé během mrtvé doby budou ztraceny. V našem příkladě očividně detektor přijímá signály i v mrtvé době, přičte ale jejich energii k právě zpracovávanému signálu a nedokáže je rozlišit jako samostatné události. N_1 detekcí s energií E odpovídá samostatným zásahům a N_2 detekcí s energií $2E$ odpovídá dvojitým zásahům, kdy do detektoru vletěla nová částice v mrtvé době, když detektor ještě zpracovával signál z předešlé častice.

Průměrná frekvence částic je

$$f = \frac{N_1 + 2N_2}{T}\,.$$

Zatím neznámou mrtvou dobu označíme jako τ. Jelikož $N_2 \ll N_1$, počet událostí n během mrtvé doby po zásahu můžeme popsat Poissonovým rozdělením

$$P(n) = \frac{(f\tau)^n}{n!}\mathrm{e}^{-f\tau}\,.$$

Zdaleka nejpravděpodobnější je $n = 0$, tedy že během mrtvé doby nenastane žádný další zásah, s pravděpodobností

$$P(0) = \mathrm{e}^{-f\tau} \approx 1 - f\tau,$$

kde jsme provedli aproximaci $f\tau \ll 1 \implies \mathrm{e}^{-f\tau} \approx 1$. Pravděpodobnost, že v mrtvé době nastane $n = 1$ zásah, je

$$P(1) = f\tau\mathrm{e}^{-f\tau} \approx f\tau,$$

kde jsme použili stejnou aproximaci.

Popišme nyní problém jazykem teorie pravděpodobnosti. Každá částice zahájí interval o délce mrtvé doby τ, během nějž s pravděpodobností $P(0) = 1 - f\tau$ nepřiletí žádná další částice a s pravděpodobností $P(1) = f\tau$ přiletí jedna další částice. Počet „náhodných pokusů“, neboli počet zahájených intervalů o délce τ, byl v Jindrově měření

$$N = N_1 + N_2 .$$

Počet dvojitých událostí během celého měření o délce T je

$$N_2 = NP(1) = Nf\tau = \frac{(N_1 + N_2)(N_1 + 2N_2)}{T}\tau .$$

Mrtvá doba Jindrova detektoru tedy je

$$\tau = \frac{N_2}{(N_1 + N_2)(N_1 + 2N_2)}T = 5{,}02 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s} \doteq 500\,\mathrm{ns}.$$

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha 46 ... návrat k U-trubici — 6 bodů

Uvažujme U-trubici o vnitřním průřezu $0{,}80\,\mathrm{cm}^2$, do které nalejeme $110\,\mathrm{ml}$ vody. Délka každého ze symetricky umístěných ramen trubice je $90\,\mathrm{cm}$. Na jeden konec trubice navlékneme nafouknutý balónek, takže se výška hladiny vody ve druhém rameni zvýší o $\Delta h = 4{,}0\,\mathrm{cm}$. Jak moc musíme balónek zmáčknout, tedy o kolik zmenšit jeho objem, aby se voda ze druhého ramene začala vylévat? Objem balónku těsně před zmáčknutím je $V_0 = 750\,\mathrm{ml}$. Objem vodorovné části a ohnutých míst U-trubice zanedbejte. *Jarda vymýšlel experiment do FYKOSu.*

Na rozhraní vody a vzduchu v rameni s balónkem musí dojít k rovnosti tlaků. Na jedné straně působí hydrostatický tlak vody o výšce $2\Delta h$ a vyrovnává jej tlak vzduchu z nafouknutého balónku. Ten tedy musí být $p_h = \rho g 2\Delta h \doteq 783\,\mathrm{Pa}$.

Aby voda začala vytékat, musí její hladina v rameni bez balónku vystoupat až do výšky l, výškový rozdíl mezi rameny tak musí být $\delta H = l - (V/S - l) = 2l - V/S = 42{,}5\,\mathrm{cm}$. Potřebný tlak je tedy $p_H = \rho g \Delta H = \rho g\,(2l - V/S) \doteq 4\,160\,\mathrm{Pa}$.

Změna tlaku je způsobena zmáčknutím balónku a zmenšením jeho objemu. Objem vzduchu po navléknutí balónku byl $V_h = V_0 + S\,(l - V/(2S) + \Delta h)$, kde V_0 je objem v balónku. Po zmáčknutí označíme objem balónku jako V_B, takže pro celkový objem vzduchu platí $V_H = V_B + 2lS - V$.

Ze stavové rovnice ideálního plynu dostáváme $V_h p_h = V_H p_H$, odkud

$$\Delta V = V_B - V_0 = V_h \frac{p_h}{p_H} - 2lS + V - V_0\,,$$

$$\Delta V = \left(V_0 + S\left(l - \frac{V}{2S} + 2\Delta h\right)\right)\frac{2\Delta h}{\left(2l - \frac{V}{S}\right)} - 2lS + V - V_0 = -640\,\mathrm{ml}\,.$$

Objem balónku musíme zmenšit o $640\,\mathrm{ml}$.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 47 ... zrychlení idealizovaného auta

6 bodů

Mějme auto s výkonem $P = 44\,\mathrm{kW}$ a hmotností $m = 1\,400 kg$, které je brzděné celkovou odporovou silou $F = 950\,\mathrm{N}$ (předpokládáme, že je tato síla konstantní – při malých rychlostech lze totiž zanedbat odpor vzduchu). Za jaký čas zrychlí z 0 na $v_\mathrm{f} = 18\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$?

Lego se takto občas zamyslí.

Zrýchlenie môžeme určiť ako celkovú silu vydelenú hmotnosťou auta. Výkon auta je sila, ktorou pôsobí na cestu vynásobená jeho rýchlosťou. Výkon máme zadaný, čiže ak má auto rýchlosť v, tak ho poháňa sila P/v. Aby sme dostali celkovú silu musíme ešte odčítať odporovú silu F, ktorá pôsobí proti pohybu. Takže môžeme zostaviť diferenciálnu rovnicu ako

$$\frac{P}{v} - F = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,.$$

Túto rovnicu budeme riešiť pomocou separácie premenných

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}t &= m\frac{\mathrm{d}v}{\frac{P}{v} - F}\,,\\
\int_0^{t_\mathrm{f}} \mathrm{d}t &= m\int_0^{v_\mathrm{f}} \frac{\mathrm{d}v}{\frac{P}{v} - F}\,,\\
t_\mathrm{f} &= m\cdot\left[-\frac{v}{F} - \frac{P}{F^2}\ln(P - Fv)\right]_0^{v_\mathrm{f}}\,,\\
t_\mathrm{f} &= m\cdot\left(\frac{P}{F^2}(\ln(P) - \ln(P - Fv_\mathrm{f})) - \frac{v_\mathrm{f}}{F}\right)\,,\\
t_\mathrm{f} &= \frac{m}{F}\left(\frac{P}{F}\ln\left(\frac{P}{P - Fv_\mathrm{f}}\right) - v_\mathrm{f}\right) \doteq 0{,}43\,\mathrm{s}\,,
\end{aligned}$$

kde vidíme, že čas je úmerný hmotnosti. Vidíme, že čas diverguje pre $P = Fv_\mathrm{f}$, pretože to by znamenalo zrýchlenie až na maximálnu dosiahnuteľnú rýchlosť, pri ktorej rozdiel hnacej a brzdnej sily ide k nule. Jediné čo pôsobí na prvý pohľad prekvapivo, je odčítanie v_f, lenže keď sa podrobnejšie pozrieme na prvý člen, môžeme spočítať, že v_f je prvý člen jeho Taylorovho polynómu a dáva celkom zmysel, že by mal vypadnúť, nakoľko tento člen vôbec nezávisí na P. Avšak keďže tam bude iba druhý člen Taylorovho rozvoja, odporová sila F sa presne vykráti (čo má zmysel) a potom pre ďalšie členy bude sila už v čitateli.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha 48 ... rybářská

7 bodů

Na vodorovné podložce leží hmotný bod o hmotnosti $m = 1{,}85\,\mathrm{kg}$. Je k němu připojeno napnuté lano, které končí na navijáku umístěném ve vodorovné vzdálenosti $L = 20{,}4\,\mathrm{m}$ od hmotného bodu ve výšce $H = 6{,}35\,\mathrm{m}$. Naviják začne lano navíjet rychlostí $v = 3{,}25\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Za jak dlouho se hmotný bod odlepí od podložky, jestliže je mezi ním a podložkou třecí koeficient $f = 0{,}415$?

Jarda navíjel kabel od sekačky.

Nejprve vyjádříme polohu hmotného bodu v závislosti na čase od začátku odvíjení t

$$x(t) = \sqrt{(l_0 - vt)^2 - H^2}\,,$$

kde $l_0 = \sqrt{H^2 + L^2}$ je počáteční délka lana. Derivací polohy získáme rychlost hmotného bodu

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \left(-v\left(l_0 - vt\right)\right)\frac{1}{\sqrt{\left(l_0 - vt\right)^2 - H^2}}\,,$$

a derivací rychlosti podle času najdeme zrychlení $a_x(t)$

$$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{v^2}{\sqrt{\left(l_0 - vt\right)^2 - H^2}}\left(1 - \frac{\left(l_0 - vt\right)^2}{\left(\left(l_0 - vt\right)^2 - H^2\right)}\right)\,.$$

Najdeme poté výslednici sil působící na hmotný bod ve vodorovném směru jako

$$F_x(t) = ma_x(t) = -T_x(t) + f\left(mg - T_y(t)\right)\,,$$

kde $T_x(t)$ je tahová síla lana ve vodorovném směru. Tu tedy pomocí zrychlení hmotného bodu a znalosti třecí síly najdeme. Když známe vodorovnou složku tahové síly, můžeme dopočítat i vertikální složky pomocí úhlu, který lano svírá s vodorovnou rovinou

$$T_y(t) = T_x(t)\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{H}{x(t)}T_x(t)\,.$$

Dosadíme z této rovnice do předchozí a dostáváme

$$F_x(t) = ma_x(t) = -\frac{x(t)}{H}T_y(t) + \left(mg - T_y(t)\right)f \quad \Rightarrow \quad T_y(t) = \frac{mgf - ma_x(t)}{\frac{x(t)}{H} + f}\,.$$

Jakmile je $T_y(t) > mg$, předmět se vznese nad podložku a úloha je vyřešena. Začneme proto dosazovat do rovnosti a upravujeme

$$T_y(t) = mg = H\frac{mgf - m\left(\frac{v^2}{\sqrt{(l_0-vt)^2-H^2}}\left(1 - \frac{(l_0-vt)^2}{\left((l_0-vt)^2-H^2\right)}\right)\right)}{\sqrt{\left(l_0 - vt\right)^2 - H^2} + fH}\,,$$

$$g\left(\left(l_0 - vt\right)^2 - H^2\right) = Hv^2\left(\frac{\left(l_0 - vt\right)^2}{\left(\left(l_0 - vt\right)^2 - H^2\right)} - 1\right)\,,$$

$$\frac{g}{Hv^2}\left(\left(l_0 - vt\right)^2 - H^2\right)^2 = H^2\,,$$

$$\left(\left(l_0 - vt\right)^2 - H^2\right) = \sqrt{\frac{H^3v^2}{g}}\,,$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{l_0 - \sqrt{\sqrt{\frac{H^3v^2}{g}} + H^2}}{v} = 4{,}25\,\mathrm{s}\,.$$

Hmotný bod se odlepí od podložky za $t = 4{,}25\,\mathrm{s}$.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 49 ... utlačovaný vzduch 8 bodů

Na jaký nejmenší objem při teplotě $t_\mathrm{v} = 25{,}0\,\mathrm{^\circ C}$ *je možné stlačit* $V_1 = 1{,}00\,\mathrm{m^3}$ *vzduchu z normálního tlaku* p_a *o stejné teplotě? K dispozici máme jako zdroj energie bojler vody o objemu* $V = 100\,\mathrm{l}$*, teplotě* $t_\mathrm{b} = 80{,}0\,\mathrm{^\circ C}$ *a jako chladič používáme velké jezero vody o teplotě* $t_\mathrm{j} = 5{,}00\,\mathrm{^\circ C}$*. Předpokládejte, že se vzduch chová jako jednoatomový ideální plyn. Všechny myšlenkové stroje, které ke stlačení plynu používáte, se musí na konci vrátit do původního stavu (k vyřešení úlohy není potřeba uvažovat konkrétní konstrukci těchto pomocných strojů).*

Dodo potřeboval stlačený vzduch.

Z termodynamických zákonů víme, že při odebírání tepla z nějaké látky existuje omezení na množství práce, které můžeme z tohoto tepla vytěžit, pokud chceme, aby použité stroje pracovaly cyklicky. Navíc se ukazuje, že je tato práce maximální, pokud jsou všechny uvažované procesy vratné.

První intuice při řešení naší úlohy by tedy mohla být právě vymýšlení takového vratného procesu. Zde bychom nejspíše potřebovali mezi boiler a jezero připojit Carnotův stroj[4] a práci využít na stlačení vzduchu. Stlačování opět potřebujeme vratné, to lze zajistit například izotermickým dějem (izotermický děj je užitečný, protože má mít vzduch na konci stejnou teplotu). Při izotermickém stlačování musíme ze vzduchu odebírat teplo. Toto teplo lze ovšem opět využít na konání práce! Zde bychom tedy museli použít stejnou úvahu, že aby byly všechny procesy vratné, museli bychom připojit ke vzduchu další Carnotův stroj, který by vzduch stlačoval dále a odpadní teplo odevzdával jezeru.

V nějaké takovéto konstrukci známe účinnosti Carnotových strojů a zákony pro ideální plyn, tedy by se nám mělo podařit výsledný tlak dopočítat. Vidíme ovšem, že tato konstrukce je velmi složitá a postup by byl pracný. Naštěstí existuje lepší způsob, nazývaný *teorém maximální práce*, který využívá toho, že se při vratných procesech nemění celková entropie.

Při použití teorému maximální práce se vůbec nemusíme soustředit na průběh celého procesu, zajímá nás pouze počáteční a koncový stav celého systému (zde tedy boiler, jezero a vzduch). Víme, že maximální práci (tedy maximální stlačení plynu) získáme, pokud se celková entropie nezmění. Dále samozřejmě máme i obecnou platnost zákona zachování energie.

Nyní tedy postupně vyjádříme příslušné změny energie a entropie pro jednolivé části našeho systému. Začneme jezerem. Při odevzdávání odpadního tepla Q se objem vody nemění, tedy se nekoná žádná práce. Změna vnitřní energie proto je $\Delta U_\mathrm{j} = Q$. Navíc má jezero velmi velkou tepelnou kapacitu. Jeho teplota se proto nemění a ze vztahu pro změnu entropie

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T}$$

máme, že změna entropie jezera je $\Delta S_\mathrm{j} = Q/T_\mathrm{j}$, kde T_j je teplota jezera v Kelvinech, tedy $T_\mathrm{j} \doteq 278\,\mathrm{K}$ (písmenem T s příslušným indexem budeme dále vždy rozumět právě termodynamickou teplotu daného systému).

Podívejme se na boiler. Ten začne na teplotě T_b a skončí na teplotě jezera T_j. Zde stále máme, že se při odebírání tepla nekoná práce, voda už ovšem má nějakou konečnou tepelnou kapacitu $C = cm = c\rho V \doteq 417{,}6\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}}$. Vnitřní energie se pak změní o $\Delta U_\mathrm{b} = C(T_\mathrm{b} - T_\mathrm{j})$. A pro změnu entropie máme

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T} = C\frac{\mathrm{d}T}{T}\,,$$

[4] Carnotův stroj je příklad konstrukce vratného stroje, který odebírá teplo Q_1 z jedné látky při teplotě T_1, koná práci W a odevzdává odpadní teplo Q_2 při teplotě T_2. Jedním z důležitých výsledků termodynamiky je, že účinnost takového vratného procesu je $W/Q_1 = 1 - T_1/T_2$.

což integrací od počáteční do koncové teploty dá

$$\Delta S_\mathrm{b} = C \cdot \ln \frac{T_\mathrm{j}}{T_\mathrm{b}} \,.$$

Zbývá vzduch. Víme, že konečná teplota má být stejná jako počáteční, tedy se vnitřní energie nezmění (předpokládáme, že je vzduch ideální plyn a vnitřní energie závisí jen na teplotě). Rovnice pro zachování energie tedy je

$$Q - C(T_\mathrm{b} - T_\mathrm{j}) = 0 \,.$$

Máme tedy vše, abychom číselně dokázali vypočítat změnu entropie vzduchu, neboť z rovnice pro zachování entropie

$$\frac{Q}{T_\mathrm{j}} - C \ln \frac{T_\mathrm{b}}{T_\mathrm{j}} + \Delta S_\mathrm{v} = 0$$

snadno vyjádříme

$$\Delta S_\mathrm{v} = -C \left(\frac{T_\mathrm{b} - T_\mathrm{j}}{T_\mathrm{j}} - \ln \frac{T_\mathrm{b}}{T_\mathrm{j}} \right) = -12{,}9\,\mathrm{kJ \cdot K^{-1}}$$

změna entropie je tedy záporná, což přesně odpovídá očekávání vzhledem k tomu, že jsme stlačili plyn, ale nezměnili teplotu.

Zbývá vyjádřit změnu entropie ideálního plynu v závislosti na změně objemu. Zde můžeme na internetu najít výraz pro entropii jednosložkového ideálního plynu

$$S \;= N s_0 + N k_\mathrm{B} \ln \left[\left(\frac{U}{U_0} \right)^c \left(\frac{V}{V_0} \right) \left(\frac{N_0}{N} \right)^{c+1} \right] ,$$

kde s_0 je konstanta taková, že $N_0 s_0$ je entropie nějakého referenčního ideálního plynu s energií U_0, objemem V_0 a počtem částic N_0 (v této oblasti termodynamiky jsou důležité jen změny entropie, tedy nad těmito referenčními hodnotami nemusíme zvlášť přemýšlet).

Z výrazu pro entropii pak snadno vidíme, že pokud se změní pouze V, tak výsledná změna entropie bude

$$\Delta S_\mathrm{v} = N k_\mathrm{B} \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_\mathrm{a} V_1}{T_\mathrm{v}} \ln \frac{V_2}{V_1} \,,$$

odkud jednoduše dopočítáme

$$V_2 = V_1 \exp \left(\frac{T_\mathrm{v} \Delta S_\mathrm{v}}{p_\mathrm{a} V_1} \right) = 3{,}22 \cdot 10^{-17}\,\mathrm{m^3} = 3{,}22 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{mm^3} \,,$$

což odpovídá stlačení do nádoby o rozměrech přibližně $1\,\mathrm{\mu m}$.

Jak postupovat, pokud bychom neměli k dispozici vzoreček pro entropii ideálního plynu? Můžeme si ho částečně odvodit. Víme, že stav plynu (a tedy i jeho entropie) je dán třemi (vhodnými) stavovými proměnnými. V našem případě známe na konci děje teplotu i počet částic, takže to stačí na to, abychom vyjádřili změnu entropie v závislosti na změně objemu.

Uvažme tedy izotermický děj. Ten je vhodný, protože se při něm nemění teplota ani počet částic, což je přesně to, co chceme. Při izotermickém ději je z plynu odebráno nějaké teplo Q_1, které je rovno vykonané práci. Pro práci v izotermickém ději máme

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} p \,\mathrm{d}V \;= p_\mathrm{a} V_1 \ln \frac{V_1}{V_2} \,,$$

což dosadíme do změny entropie $\Delta S_\mathrm{v} = -Q_1/T_\mathrm{v}$, čímž dostaneme stejný výsledek. Dodejme, že izotermický děj v tomto postupu je skutečně jen pomůcka na odvození vztahu pro změnu entropie. Ve skutečnosti vůbec netvrdíme, že v naší úloze musí stlačování probíhat právě izotermicky. To je lépe vidět z postupu, kde rovnou využíváme entropii ideálního plynu.

Jiří Kohl
jiri.kohl@fykos.cz

Úloha 50 ... optimálně excitovaný kvantový oscilátor 7 bodů

Lego vytvořil jednorozměrný kvantový lineární oscilátor s $\omega = 1{,}17 \cdot 10^{13}\,\mathrm{s^{-1}}$. Připojí jej k tepelnému rezervoáru o teplotě T a počká, až se ustálí rovnováha. Jaká má být tato teplota, aby byla pravděpodobnost obsazení prvního excitovaného stavu co nejvyšší?

Podle Lega je název této úlohy velmi fotosyntetický.

Keď sa ustanoví rovnováha, budú pravdepodobnosti stavov dané Boltzmannovým rozdelením

$$p_n = \frac{1}{Z} eu^{-\frac{E_n}{k_\mathrm{B} T}}\,,$$

kde k_B je Boltzmannova konštanta a T je teplota tepelného rezervoáru, s ktorým je systém v rovnováhe. Partičná suma Z je okrem iného normovacou konštantou, ktorej veľkosť môžeme dostať z podmienky $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{E_n}{k_\mathrm{B}T}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega(n+1/2)}{k_\mathrm{B}T}} = \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{2k_\mathrm{B}T}} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T} n} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{2k_\mathrm{B}T}}}{1 - \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}}}\,,$$

kde v poslednom kroku sme len sčítali geometrickú radu. Pravdepodobnosť obsadenia prvého excitovaného stavu je teda

$$p_1 = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}}}{\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{2k_\mathrm{B}T}}} \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega(1+1/2)}{k_\mathrm{B}T}} = \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}}\right) \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}}\,,$$

a našou úlohou je zistiť pre ktoré T bude táto hodnota maximálna.

Môžeme priamočiaro zderivovať podľa T, položiť výsledok rovný 0 a z danej rovnice dostať T, pre ktoré je p_1 maximálne. Ale pre tých lenivších z nás, ktorým sa nechce derivovať zložené výrazy, sa núka nasledujúci trik: substituujeme si $x = \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}}$, potom $p_1 = (1-x)x$. To je parabola, ktorá má maximálnu hodnotu pre $x = 1/2$. Dosadením substitúcie späť dostávame rovnicu pre T

$$\frac{1}{2} = \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}\ln 2} = 129\,\mathrm{K}\,,$$

pre túto teplotu bude prvý excitovaný stav obsadený s najvyššou pravdepodobnosťou.

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha X.1 ... sluneční plachetnice vznášející se 4 body

Jaká by musela být plošná hustota sluneční plachetnice, aby tlak slunečního záření přesně vyrovnal přitažlivou gravitační sílu Slunce? Povrch sluneční plachetnice je dokonale odrazivý a rovina plachty je natočena kolmo ke Slunci.

Jindru zajímalo, do jaké plochy se musí roztáhnout, aby se mohl volně vznášet ve Sluneční soustavě.

Dopadající foton s hybností $p_{\mathrm{pred}} = E/c$ se od plachetnice odrazí a změní svoji hybnost na $p_{\mathrm{po}} = -E/c$. Celková hybnost se musí zachovat, proto se hybnost plachetnice změní o $\Delta p_{\mathrm{plach}} = p_{\mathrm{pred}} - p_{\mathrm{po}} = 2E/c$. Pokud vezmeme celkovou změnu hybnosti všech dopadajících fotonů na jednotku času, dostáváme sílu

$$F_{\mathrm{rad}} = \frac{2IS}{c}\,,$$

kde I je intenzita záření (příkon na jednotku plochy), S je plocha plachty a c je rychlost světla. Intenzita záření ve vzdálenosti r od středu Slunce je

$$I = \frac{L}{4\pi r^2}\,,$$

kde $L = 3{,}83 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$ je zářivý výkon Slunce. Vidíme, že síla záření je úměrná $1/r^2$ stejně jako gravitační síla. Obě síly se vyrovnají, pokud platí

$$F_{\mathrm{rad}} = \frac{LS}{2\pi c r^2} = \frac{GMm}{r^2},$$

kde G je gravitační konstanta, $M = 1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ je hmotnost Slunce a m je celková hmotnost sluneční plachetnice. Kritická plošná hustota sluneční plachetnice je

$$\frac{m}{S} = \frac{L}{2\pi c M G} = 1{,}531 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-2}} \doteq 1{,}53\,\mathrm{g{\cdot}m^{-2}}.$$

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha X.2 ... sluneční plachetnice na cestě ke hvězdám 5 bodů

Mějme sluneční plachetnici o hmotnosti $m = 10\,\mathrm{kg}$ s plochou plachty $S = 10\,000\,\mathrm{m}^2$. Plachetnice začíná svou cestu ve vzdálenosti oběžné dráhy Země s nulovou počáteční rychlostí vůči Slunci. Jaká bude velikost rychlosti sluneční plachetnice v nekonečnu? Povrch sluneční plachetnice je dokonale odrazivý a rovina plachty je vždy natočena kolmo ke Slunci.

Jindra se chtěl roztáhnout do takové plochy, aby odletěl ke hvězdám.

Na solární plachetnici působí ve směru od Slunce tlak záření a ve směru ke Slunci gravitační síla. Síla záření působící na dokonale odrazivou plachtu o ploše S, na niž záření dopadá kolmo, je

$$F = \frac{2IS}{c} = \frac{LS}{2\pi c r^2}\,,$$

kde $L = 3{,}83 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$ je zářivý výkon Slunce, c je rychlost světla a r je vzdálenost od středu Slunce. Celková síla působící na plachetnici je rozdílem gravitační síly (směr ke Slunci) a zářivé síly (směr od Slunce)

$$F(r) = \frac{LS}{2\pi c r^2} - \frac{GMm}{r^2}\,,$$

kde G je gravitační konstanta, $M = 1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ je hmotnost Slunce a m je hmotnost plachetnice. Radiální přitažlivá síla $F(r) = -km/r^2$ je tudíž oproti klasické nebeské mechanice modifikována konstantou

$$k = GM - \frac{LS}{2\pi cm} = -7{,}051 \cdot 10^{19}\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Po dosazení čísel ze zadání jsme ověřili, že $k < 0$, tudíž je síla odpudivá.

Potenciální energie v tomto poli v závislosti na vzdálenosti r od Slunce je

$$E_\mathrm{p} = -\frac{km}{r}\,.$$

Počáteční kinetická energie sondy je nulová. Počáteční potenciální energie je

$$E_{\mathrm{p},0} = -\frac{km}{a_\mathrm{Z}}\,,$$

kde $a_\mathrm{Z} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$ je poloměr oběžné dráhy Země. V nekonečnu bude potenciální energie sondy nulová, tudíž veškerá počáteční potenciální energie se přemění na kinetickou energii

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{km}{a_\mathrm{Z}}\,,$$

$$v = \sqrt{-\frac{2k}{a_\mathrm{Z}}} = 3{,}070 \cdot 10^4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq 30{,}7\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Velikost rychlosti sluneční plachetnice v nekonečnu bude $v = 30{,}7\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$.

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha X.3 ... sluneční plachetnice na cestě ke hvězdám II — 6 bodů

Mějme sluneční plachetnici o hmotnosti $m = 10\,\mathrm{kg}$ s plochou plachty $S = 10\,000\,\mathrm{m^2}$. Plachetnice na začátku obíhá okolo Slunce po stejné oběžné dráze jako Země, avšak hodně daleko od Země mimo její gravitační vliv. Náhle velmi rychle rozvine svou plachtu. Jaká bude velikost rychlosti sluneční plachetnice v nekonečnu? Povrch sluneční plachetnice je dokonale odrazivý a rovina plachty je po rozvinutí vždy natočena kolmo ke Slunci. Oběžnou dráhu Země považujte za kruhovou. *Jindra cítil, že ho již Země přitahuje příliš.*

Na solární plachetnici působí ve směru od Slunce tlak záření a ve směru ke Slunci gravitační síla. Celková síla je

$$F(r) = \frac{LS}{2\pi cr^2} - \frac{GMm}{r^2}\,,$$

kde $L = 3{,}83 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$ je zářivý výkon Slunce, S je plocha solární plachetnice, c je rychlost světla, G je gravitační konstanta, $M = 1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ je hmotnost Slunce, m je hmotnost plachetnice a r je vzdálenost od středu Slunce. Tento vztah je detailněji odvozen v úloze „sluneční plachetnice na cestě ke hvězdám“.

Radiální přitažlivá síla $F(r) = -km/r^2$ je oproti klasické nebeské mechanice modifikována konstantou

$$k = GM - \frac{LS}{2\pi cm} = -7{,}051 \cdot 10^{19}\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Při dosazení čísel ze zadání jsme ověřili, že $k < 0$, tudíž síla je odpudivá.

Potenciální energie v tomto poli v závislosti na vzdálenosti od Slunce r je

$$E_\mathrm{p} = -\frac{km}{r}.$$

Sonda se na začátku pohybovala po kruhové dráze s poloměrem $a_\mathrm{Z} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$, tudíž měla počáteční rychlost

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{a_\mathrm{Z}}}.$$

Počáteční kinetická energie sondy je

$$E_\mathrm{k,0} = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\frac{GM}{a_\mathrm{Z}}.$$

Vektor počáteční rychlosti je kolmý na směr ke Slunci. Počáteční potenciální energie je

$$E_\mathrm{p,0} = -\frac{km}{a_\mathrm{Z}}.$$

V nekonečnu bude potenciální energie sondy nulová, tudíž veškerá počáteční potenciální energie se přemění na kinetickou energii. V důsledku zachování momentu hybnosti bude v nekonečnu kolmá složka rychlosti nulová a vektor rychlosti bude radiální

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 &= -\frac{km}{a_\mathrm{Z}} + \frac{1}{2}m\frac{GM}{a_\mathrm{Z}}\,,\\ v &= \sqrt{-\frac{2k}{a_\mathrm{Z}} + \frac{GM}{a_\mathrm{Z}}} = 4{,}278 \cdot 10^4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq 42{,}8\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}\,.\end{aligned}$$

Velikost rychlosti sluneční plachetnice v nekonečnu bude $v = 42{,}8\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$.

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha X.4 ... sluneční plachetnice na cestě k Marsu — 7 bodů

Jaká by musela být plošná hustota sluneční plachetnice, aby po Hohmannově trajektorii přeletěla z oběžné dráhy Země k oběžné dráze Marsu? Plachetnice zpočátku obíhá Slunce po stejné dráze jako Země a poté rozvine plachtu. Povrch sluneční plachetnice je dokonale odrazivý a rovina plachty je po celou dobu letu natočena kolmo ke Slunci. Plachetnice nemá žádné raketové motory, využívá pouze své odrazivosti. Neuvažujte gravitační vliv Země na počátku cesty sluneční plachetnice a dráhy Země i Marsu okolo Slunce považujte za kruhové.

Jindra chtěl potěšit Teri úlohou o Hochmanové trajektorii.

Hohmannova trajektorie mezi dvěma kruhovými oběžnými drahami je půlelipsa s pericentrem na vnitřní dráze a apocentrem na vnější dráze. Hohmannova trajektorie je efektivní z hlediska spotřeby paliva a používá se pro lety k blízkým planetám jako Venuše a Mars. Ke vzdálenějším planetám sluneční soustavy jako Jupiter nebo Saturn se využívají gravitační manévry.

Na solární plachetnici působí ve směru od Slunce tlak záření a ve směru ke Slunci gravitační síla. Celková síla je

$$F(r) = \frac{LS}{2\pi c r^2} - \frac{GMm}{r^2},$$

kde $L = 3{,}83 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$ je zářivý výkon Slunce, S je plocha solární plachetnice, c je rychlost světla, G je gravitační konstanta, $M = 1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ je hmotnost Slunce, m je hmotnost plachetnice a r je vzdálenost od středu Slunce. Tento vztah byl detailněji odvozen v úloze „sluneční plachetnice na cestě ke hvězdám".

Radiální přitažlivá síla $F(r) = -km/r^2$ je oproti klasické nebeské mechanice modifikována konstantou

$$k = GM - \frac{LS}{2\pi cm}.$$

Avšak i tato nová síla je přímo úměrná $1/r^2$ jako klasická gravitační síla, tudíž se plachetnice bude pohybovat po kuželosečce jako v obyčejné nebeské mechanice. Jen konstanta k je menší.

Potenciální energie plachetnice ve vzdálenosti r od Slunce je

$$E_\mathrm{p} = -\frac{km}{r}.$$

Celková mechanická energie na eliptické dráze je analogicky s gravitačním polem

$$E = -\frac{km}{2a},$$

kde a je hlavní poloosa elipsy. Pro Hohmannovu trajektorii mezi zemskou a marsovskou dráhou je vzdálenost v pericentru $r_\mathrm{p} = a_\mathrm{Z} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$, vzdálenost v apocentru $r_\mathrm{a} = a_\mathrm{M} = 2{,}279 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$ a velká poloosa $a = (a_\mathrm{Z} + a_\mathrm{M})/2$. Rychlost v pericentru je stejná jako oběžná rychlost Země

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{GM}{a_\mathrm{Z}}}.$$

Jakmile však sonda roztáhne plachtu, změní se konstanta přitažlivé síly k a dráha sondy se změní z kruhové na eliptickou.

Aby sonda doletěla k Marsu, musí její parametry vyhovovat následující rovnici, kterou si upravíme

$$\begin{aligned}
-\frac{km}{a_\mathrm{Z} + a_\mathrm{M}} &= -\frac{km}{a_\mathrm{Z}} + \frac{1}{2}mv_\mathrm{p}^2,\\
-\frac{k}{a_\mathrm{Z} + a_\mathrm{M}} &= -\frac{k}{a_\mathrm{Z}} + \frac{GM}{2a_\mathrm{Z}},\\
k\left(\frac{1}{a_\mathrm{Z}} - \frac{1}{a_\mathrm{Z} + a_\mathrm{M}}\right) &= \frac{GM}{2a_\mathrm{Z}},\\
k\frac{a_\mathrm{M}}{a_\mathrm{Z}(a_\mathrm{Z} + a_\mathrm{M})} &= \frac{GM}{2a_\mathrm{Z}},\\
k = GM - \frac{LS}{2\pi cm} &= \frac{GM(a_\mathrm{Z} + a_\mathrm{M})}{2a_\mathrm{M}},\\
\frac{L}{2\pi GcM}\frac{S}{m} &= 1 - \frac{a_\mathrm{Z} + a_\mathrm{M}}{2a_\mathrm{M}},\\
\frac{m}{S} &= \frac{L}{2\pi GcM}\left(1 - \frac{a_\mathrm{Z} + a_\mathrm{M}}{2a_\mathrm{M}}\right)^{-1},\\
\frac{m}{S} &= 8{,}912 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-2}} \doteq 8{,}91\,\mathrm{g{\cdot}m^{-2}}.
\end{aligned}$$

Plošná hustota sluneční plachetnice by musela být $8{,}91\,\mathrm{g{\cdot}m^{-2}}$, aby po Hohmannově trajektorii doletěla od Země k Marsu.

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha H.1 ... vzduch pod vodou – maximálně zjednodušený 4 body

Máme kostku se stranou $a = 10\,\mathrm{cm}$ a hustotou $\rho_\mathrm{k} = 150\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Tuto kostku ponoříme do vody tak, že začneme z polohy, kdy se spodní stěna kostky akorát dotýká hladiny vody, a následně ji protlačíme dolů (bez jakéhokoli otáčení) o $h = 6{,}0\,\mathrm{cm}$. Jakou práci při tom vykonáme? Předpokládejte, že plocha hladiny S je obrovská ($S \gg a^2$), takže se výška hladiny v průběhu procesu nezmění.

Lego opravoval...

Cez energie

Kocka má hmotnosť $m_\mathrm{k} = a^3\rho_\mathrm{k}$, čiže pri jej ponorení o $\Delta h_\mathrm{k} = -h$ sa jej potenciálna energia zníži o

$$\Delta E_\mathrm{pk} = m_\mathrm{k} g \Delta h_\mathrm{k} = -a^3\rho_\mathrm{k} g h\,.$$

Vytlačili sme tak vodu o objeme a^2h, a hmotnosťou $m_\mathrm{v} = a^2h\rho_\mathrm{v}$. Ťažisko tohto kvádra vody sa pred ponorením nachádzalo $h/2$ pod hladinou. Nakoľko predpokladáme, že rezervoár vody je veľký a teda sa hladina vody pri ponorení nemení, tak bola táto voda vytlačená presne na úroveň hladiny, čiže jej výška stúpla o $\Delta h_\mathrm{v} = h/2$. Tým pádom potenciálna energia vody narástla o

$$\Delta E_\mathrm{pv} = m_\mathrm{v} g \Delta h_\mathrm{v} = a^2 h\rho_\mathrm{v} g\frac{h}{2}\,.$$

Spolu teda potenciálna energia narastie o

$$\Delta E_\mathrm{p} = \Delta E_\mathrm{pv} - \Delta E_\mathrm{pk} = a^2h\rho_\mathrm{v} g\frac{h}{2} - a^3\rho_\mathrm{k} g h = g a^2 h\left(\rho_\mathrm{v}\frac{h}{2} - \rho_\mathrm{k} a\right) = 0{,}088\,\mathrm{J}\,.$$

Cez sily

Na kocku neustále pôsobí tiažová sila $F_\mathrm{g} = m_\mathrm{k} g = a^3\rho_\mathrm{k} g$. Zároveň na ňu bude počas ponárania pôsobiť vztlaková sila, pričom keď je kocka ponorená o x, tak vytlačí kvapalinu s objemom xa^2. Preto vztlaková sila bude

$$F_\mathrm{vz} = V\rho_\mathrm{v} g = a^2 x\rho_\mathrm{v} g\,.$$

Výsledná sila teda bude (ak ako kladný smer zvolíme smer proti pohybu, čiže nahor)

$$F_\mathrm{v} = F_\mathrm{vz} - F_\mathrm{g} = a^2 x\rho_\mathrm{v} g - a^3\rho_\mathrm{k} g\,.$$

Potom výslednú prácu môžeme získať jednoducho integráciou

$$W = \int_0^h F_\mathrm{v}\,\mathrm{d}x = \int_0^h \left(a^2x\rho_\mathrm{v} g - a^3\rho_\mathrm{k} g\right)\mathrm{d}x = \left[a^2\rho_\mathrm{v} g x^2/2 - a^3\rho_\mathrm{k} g x\right]_0^h = g a^2 h\left(\rho_\mathrm{v}\frac{h}{2} - \rho_\mathrm{k} a\right)\,.$$

Alebo, ak sa chceme vyhnúť integrácii, môžeme využiť to, že sila sa mení lineárne a vtedy stačí zobrať priemernú silu a prenásobiť ju celkovou dráhou. Celková dráha je h, priemernú silu môžeme spočítať napríklad ako silu uprostred pohybu (čiže v $x = h/2$) ako

$$\bar{F} = a^2 \frac{h}{2} \rho_\mathrm{v} g - a^3 \rho_\mathrm{k} g \,.$$

Taktiež by sme ju mohli spočítať ako priemer síl na začiatku a na konci (to funguje práve preto, že sa mení lineárne, inak by tento trik ani nešiel použiť). Potom dostaneme prácu ako

$$W = \bar{F} s = \left(a^2 \frac{h}{2} \rho_\mathrm{v} g - a^3 \rho_\mathrm{k} g \right) h = g a^2 h \left(\rho_\mathrm{v} \frac{h}{2} - \rho_\mathrm{k} a \right) = 0{,}088\,\mathrm{J} \,.$$

Tiež je možné použiť ďalšie triky analogické výpočtu dráhy rovnomerne zrýchleného pohybu (ako počítanie plochy lichobežníka). Všetko vedie k tomu istému výsledku.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha H.2 ... vzduch pod vodou – velmi zjednodušený 4 body

Máme kostku se stranou $a = 10\,\mathrm{cm}$ a hustotou $\rho_\mathrm{k} = 150\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Tuto kostku ponoříme do vody tak, že začneme z polohy, kdy se spodní stěna kostky akorát dotýká hladiny vody, a následně ji protlačíme dolů (bez jakéhokoli otáčení) o $h = 15\,\mathrm{cm}$. Jakou práci při tom vykonáme? Předpokládejte, že plocha hladiny S je obrovská ($S \gg a^2$), a proto se výška hladiny v průběhu procesu nezmění.

...a jak Lego opravoval...

Cez energie

Kocka má hmotnosť $m_\mathrm{k} = a^3 \rho_\mathrm{k}$, čiže pri ponorení sa o $\Delta h_\mathrm{k} = -h$ sa jej potenciálna energia zníži o

$$\Delta E_\mathrm{pk} = m_\mathrm{k} g \Delta h_\mathrm{k} = -a^3 \rho_\mathrm{k} g h \,.$$

Celá kocka skončila pod hladinou, čiže vytlačili sme vodu s objemom a^3, s hmotnosťou $m_\mathrm{v} = a^3 \rho_\mathrm{v}$. Ťažisko tejto kocky vody sa pred ponáraním nachádzalo $h - a/2$ pod hladinou. Nakoľko predpokladáme, že rezervoár vody je veľký a teda sa jeho výška nemení, tak bola táto voda vytlačená presne na úroveň hladiny, čiže jej výška stúpla o $\Delta h_\mathrm{v} = h - a/2$. Tým pádom potenciálna energia vody narástla o

$$\Delta E_\mathrm{pv} = m_\mathrm{v} g \Delta h_\mathrm{v} = a^3 \rho_\mathrm{v} g \left(h - \frac{a}{2} \right) \,.$$

Spolu teda potenciálna energia narastie o

$$\Delta E_\mathrm{p} = \Delta E_\mathrm{pv} - \Delta E_\mathrm{pk} = a^3 \rho_\mathrm{v} g \left(h - \frac{a}{2} \right) - a^3 \rho_\mathrm{k} g h = g a^3 \left(\rho_\mathrm{v} \left(h - \frac{a}{2} \right) - \rho_\mathrm{k} h \right) = 0{,}76\,\mathrm{J} \,.$$

Cez sily

Na kocku neustále pôsobí tiažová sila $F_\mathrm{g} = m_\mathrm{k} g = a^3 \rho_\mathrm{k} g$. Zároveň na ňu bude počas ponárania pôsobiť vztlaková sila, pričom keď je kocka ponorená o $x < a$, vytláča kvapalinu s objemom xa^2. Tým pádom vztlaková sila bude

$$F_\mathrm{vz} = V \rho_\mathrm{v} g = a^2 x \rho_\mathrm{v} g\,.$$

Potom prácu potrebnú na to, aby sme kocku dostali pod hladinu, môžeme získať pomocou spôsobov spomenutých v predchádzajúcej úlohe. Integráciou

$$W_1 = \int_0^a F_\mathrm{v}\,\mathrm{d}x = \int_0^a (a^2 x \rho_\mathrm{v} g - a^3 \rho_\mathrm{k} g)\,\mathrm{d}x = [a^2 \rho_\mathrm{v} g x^2/2 - a^3 \rho_\mathrm{k} g x]_0^a = g a^4 \left(\frac{1}{2}\rho_\mathrm{v} - \rho_\mathrm{k}\right)\,.$$

alebo, pomocou priemernej sily

$$W_1 = \bar{F} s = \left(a^2 \frac{a}{2} \rho_\mathrm{v} g - a^3 \rho_\mathrm{k} g\right) h = g a^4 \left(\frac{1}{2}\rho_\mathrm{v} - \rho_\mathrm{k}\right)\,.$$

Následne, keď je celá kocka pod hladinou, už je objem vytlačenej kvapaliny konštantný, čiže aj sila je konštantná $F_\mathrm{v} = a^3 g(\rho_\mathrm{v} - \rho_\mathrm{k})$. Do tohto stavu sme sa dostali po prejdení vzdialenosti a, čiže s touto konštantnou silou musí kocka prejsť zostávajúcich $h - a$, a teda ešte treba vykonať prácu

$$W_2 = F_\mathrm{v}(h - a) = a^3 g(\rho_\mathrm{v} - \rho_\mathrm{k})(h - a)\,.$$

Spolu teda treba vykonať prácu

$$W = W_1 + W_2 = g a^4 \left(\frac{1}{2}\rho_\mathrm{v} - \rho_\mathrm{k}\right) + a^3 g(\rho_\mathrm{v} - \rho_\mathrm{k})(h - a) = g a^3 \left(\rho_\mathrm{v}\left(h - \frac{a}{2}\right) - \rho_\mathrm{k} h\right) = 0{,}76\,\mathrm{J}\,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha H.3 ... vzduch pod vodou – méně zjednodušený 5 bodů

Máme kostku se stranou $a = 10\,\mathrm{cm}$ a hustotou $\rho_\mathrm{k} = 150\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Tuto kostku ponoříme do vody v nádobě tak, že začneme z polohy, kdy se spodní stěna kostky akorát dotýká hladiny vody, a následně ji protlačíme dolů (bez jakéhokoli otáčení) o $h = 15\,\mathrm{cm}$. Jakou práci při tom vykonáme? Průřez nádoby (tedy plocha hladiny) je $S = 300\,\mathrm{cm^2}$.

...Lega napadaly zjednodušené verze úlohy...

Budeme sa venovať už len riešeniu cez energie, nakoľko je matematicky jednoduchšie. Kocka má hmotnosť $m_\mathrm{k} = a^3 \rho_\mathrm{k}$, čiže pri ponorení sa o $\Delta h_\mathrm{k} = -h$ sa jej potenciálna energia zníži o

$$\Delta E_\mathrm{pk} = m_\mathrm{k} g \Delta h_\mathrm{k} = -a^3 \rho_\mathrm{k} g h\,.$$

Celá kocka skončila pod hladinou, čiže vytlačili sme vodu s objemom a^3, s hmotnosťou $m_\mathrm{v} = a^3 \rho_\mathrm{v}$. Ťažisko tejto kocky vody sa pred ponáraním nachádzalo $h - a/2$ pod hladinou. Vytlačená voda sa teraz nachádza nad pôvodnou hladinou. Výška hladiny teda stúpla o pomer objemu vytlačenej vody a plochy hladiny $\Delta h_\mathrm{h} = a^3/S$, pričom ťažisko vytlačenej vody sa bude nachádzať uprostred tohoto kvádra. Vytlačená voda tak stúpla o svoju cestu k hladine a o cestu, ktorá je nad pôvodnou hladinou $\Delta h_\mathrm{v} = h - a/2 + \Delta h_\mathrm{h}/2 = h - a/2 + a^3/(2S)$. Tým pádom potenciálna energia vody narástla o

$$\Delta E_\mathrm{pv} = m_\mathrm{v} g \Delta h_\mathrm{v} = a^3 \rho_\mathrm{v} g \left(h - \frac{a}{2} + \frac{a^3}{2S} \right) .$$

Spolu teda potenciálna energia narastie o

$$\begin{aligned} \Delta E_\mathrm{p} = \Delta E_\mathrm{pv} - \Delta E_\mathrm{pk} &= a^3 \rho_\mathrm{v} g \left(h - \frac{a}{2} + \frac{a^3}{2S} \right) - a^3 \rho_\mathrm{k} g h \\ &= g a^3 \left(\rho_\mathrm{v} \left(h - \frac{a}{2} + \frac{a^3}{2S} \right) - \rho_\mathrm{k} h \right) = 0{,}92\,\mathrm{J}\,. \end{aligned}$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha H.4 ... vzduch pod vodou – stále zjednodušený 5 bodů

Máme kostku se stranou $a = 10\,\mathrm{cm}$ a hustotou $\rho_\mathrm{k} = 150\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Tuto kostku ponoříme do vody tak, že začneme z polohy, kdy se spodní stěna kostky akorát dotýká hladiny vody, a následně ji protlačíme dolů (bez jakéhokoli otáčení) o $h = 6{,}0\,\mathrm{cm}$. Jakou práci při tom vykonáme? Průřez nádoby (tedy plocha hladiny) je $S = 300\,\mathrm{cm^2}$.

…až nakonec Lego doopravoval.

Riešenie s využitím síl je možné, ale náročné (aj keď v prípade tejto úlohy ten rozdiel nie je tak veľký).

Kocka má hmotnosť $m_\mathrm{k} = a^3 \rho_\mathrm{k}$, čiže pri ponorení sa o $\Delta h_\mathrm{k} = -h$ sa jej potenciálna energia zníži o

$$\Delta E_\mathrm{pk} = m_\mathrm{k} g \Delta h_\mathrm{k} = -a^3 \rho_\mathrm{k} g h\,.$$

Vytlačili[5] sme vodu s objemom $a^2 h$, čiže hmotnosťou $m_\mathrm{v} = a^2 h \rho_\mathrm{v}$. Ťažisko tohto kvádra vody sa pred ponorením nachádzalo $h/2$ pod hladinou. Lenže vytlačená voda sa musí presunúť nad pôvodnú hladinu a zmestiť sa niekde medzi steny kocky a steny nádoby, čiže vytvorí hranol s podstavou $S - a^2$ a objemom $a^2 h$. Výška tohto hranolu teda bude $\Delta h_\mathrm{h} = a^2 h/(S - a^2) = 3\,\mathrm{cm}$,[6] pričom ťažisko vytlačenej vody bude v polovici tejto výšky. Zmenu výšky ťažiska vytlačenej vody teda dostaneme ako súčet cesty po pôvodnú hladinu ($h/2$) a nad ňu ($a^2 h/2(S - a^2)$). Spolu teda zmena potenciálnej energie vody bude

$$\Delta E_\mathrm{pv} = m_\mathrm{v} g \Delta h_\mathrm{v} = a^2 h \rho_\mathrm{v} g \left(\frac{h}{2} + \frac{a^2 h}{2(S - a^2)} \right) = \frac{1}{2} a^2 h^2 \rho_\mathrm{v} g \frac{S}{S - a^2}\,,$$

môžeme si všimnúť, že pre $S \gg a^2$ by posledný zlomok šiel k 1 a teda by sme dostali rovnaký výsledok ako v prvej úlohe tejto série.

[5] pozor, pod „vytlačenou vodou“ v tomto riešení myslíme iba tú časť objemu kocky, ktorá sa nachádza tam, kde bola voda už pred ponáraním. Teda časť objemu, ktorá je teraz pod hladinou ale je zároveň nad pôvodnou hladinou nepočítame, pretože tam voda nebola a teda nemusíme riešiť kam sa presunula

[6] tu je dôležité si skontrolovať, že skutočne $h + \Delta h_\mathrm{h} < a$, teda že kocka naozaj nebude celá ponorená

Spolu teda potenciálna energia narastie o

$$W = \Delta E_{\mathrm{pv}} + \Delta E_{\mathrm{pk}} = \frac{1}{2} a^2 h^2 \rho_{\mathrm{v}} g \frac{S}{S - a^2} - a^3 \rho_{\mathrm{k}} g h = g a^2 h \left(\rho_{\mathrm{v}} \frac{h}{2} \frac{S}{S - a^2} - \rho_{\mathrm{k}} a \right) = 0{,}18\,\mathrm{J}\,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha M.1 ... cesta Blankou poprvé

3 body

Pirát silnic jede v autě rychlostí $v_1 = 80{,}0\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Po uražení třetiny vzdálenosti, na které probíhá úsekové měření, si uvědomí, že by měl dodržet maximální povolenou rychlost $\bar{v} = 70{,}0\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, která se měří jako průměrná rychlost průjezdu měřeným úsekem. Jakou nejvyšší rychlostí v_2 může jet následující dvě třetiny dráhy, aby maximální povolenou rychlost dodržel? Zanedbejte čas potřebný pro zpomalení na požadovanou rychlost. Odpověď uveďte v $\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

Karel přemýšlel nad rychlostí.

Označme si celkovou uraženou dráhu jako s, pak můžeme napsat, že pro celkový čas, a tedy maximální rychlost, kterou by mohl jet pirát silnic, platí

$$t = \frac{s}{\bar{v}} = \frac{1}{3}\frac{s}{v_1} + \frac{2}{3}\frac{s}{v_2}\,,$$

kde se nám zkrátí celková dráha. Tím se nám rovnice zjednodušuje. Chceme znát rychlost v_2, takže ji převedeme nalevo a postupně vyjádříme

$$\frac{2}{3}\frac{1}{v_2} = \frac{1}{\bar{v}} - \frac{1}{3}\frac{1}{v_1}\,,$$

$$\frac{3}{2} v_2 = \frac{3\bar{v}v_1}{3v_1 - \bar{v}}\,,$$

$$v_2 = \frac{2\bar{v}v_1}{3v_1 - \bar{v}} \doteq 65{,}9\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}\,.$$

Pokud první třetinu vzdálenosti urazí pirát rychlostí $80{,}0\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, pak musí zbytek jízdy jet rychlostí $65{,}9\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, aby udržel průměrnou rychlost na $70{,}0\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Není to tedy výsledek $65{,}0\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, jak by nám možná radila intuice.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha M.2 ... cesta Blankou... možná...

4 body

Představte si, že se potřebujete rozhodnout, jak pojedete na chatu. Vybíráte si mezi cestou délky $s_1 = 13\,\mathrm{km}$ uraženou za $t_1 = 25\,\mathrm{min}$ a dráhou $s_2 = 20\,\mathrm{km}$ uraženou za $t_2 = 20\,\mathrm{min}$. Dále předpokládejte, že spotřeba benzínu je konstantní $c = 6{,}7\,\mathrm{l/(100\,km)}$ a cena benzínu je $p = 40{,}2\,\mathrm{Kč{\cdot}l^{-1}}$. Říká se, že čas jsou peníze. Jakou minimální hodnotu tedy musí mít váš čas, aby pro vás bylo výhodnější jet delší trasou? Výsledek uveďte v českých korunách za hodinu.

Karel přemýšlel nad financemi a cenou času.

Reálný problém by byl samozřejmě komplexnější. Dopravní situace se dynamicky mění, a i když nám navigace poradí rychlejší cestu, může se v úseku stát nehoda a my tam „zkysneme“.

Nebo se naopak může rozpustit dopravní zácpa na jiné trase, kterou jsme si nevybrali. Náš příklad představuje jednoduchý model pro konstantní parametry. V reálné situaci je i spotřeba paliva proměnlivá v závislosti na rychlosti, resp. ve městě na zrychlování a zpomalování na křižovatkách.

Vrhněme se nyní na naši konkrétní úlohu. Cena paliva spotřebovaného projetím trasy je určena součinem vzdálenosti, spotřeby a ceny paliva. Pro první, kratší, trasu vychází

$$P_1 = s_1 c p \doteq 35{,}0\,\mathrm{Kč}\,.$$

Druhá trasa je pak analogicky

$$P_2 = s_2 c p \doteq 53{,}9\,\mathrm{Kč}\,.$$

Aby se nám vyplatilo jet rychleji delší trasu, musí být cena času v jednotkách Kč·h^{-1} vyšší než rozdíl částek dělený časem, tedy

$$X > \frac{P_2 - P_1}{t_1 - t_2} = \frac{s_2 - s_1}{t_1 - t_2} c p \doteq 226\,\mathrm{Kč{\cdot}h^{-1}}\,.$$

Abychom se v tomto konkrétním případě rozhodli jet delší trasou v kratším čase, musíme si cenit svého času na více než 226 korun za hodinu. Když se opět podíváme na reálnou situaci, ve skutečnosti má auto nejnižší spotřebu při plynulé jízdě bez brzdění, rychlostí, která závisí na aerodynamice auta. Obvykle se tvrdí, že tato rychlost je pro běžná osobní auta kolem $80\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ až $90\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Nejspíše tedy bude rozdíl spotřebovaných pohonných hmot při našich dvou trasách menší, takže by stačilo i nižší ohodnocení našeho času.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha M.3 ... střídavá cesta Blankou — 4 body

Představte si, že jedete po rovné silnici a neomezuje vás provoz, ale chcete dodržovat rychlost. Na silnici se pravidelně střídají omezení rychlosti na $v_{50} = 50\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ a $v_{70} = 70\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, značky jsou od sebe vždy vzdálené $d = 500\,\mathrm{m}$. Jedete tak, že na úrovni značky 70 začnete zrychlovat se zrychlením $a = 1{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ z rychlosti v_{50} na v_{70}. Naopak zpomalovat začnete se zrychlením stejné velikosti, ale opačného směru, abyste dosáhli rychlosti v_{50} právě na úrovni značky 50. Jinak jedete v úseku vždy maximální povolenou rychlostí. Jaké průměrné rychlosti v kilometrech za hodinu dosáhnete? Délku auta zanedbejte. *Karel přemýšlel o průměrech.*

Popsaná jízda po silnici se skládá ze 4 opakujících se částí: z rovnoměrné jízdy v celé oblasti v_{50}, zrychlování na v_{70}, rovnoměrné jízdy v_{70} a zpomalování na v_{50}. Průměrnou rychlost určíme z celkového času T, za který urazí auto dráhu $2d$.

První část času určíme snadno jako

$$t_1 = \frac{d}{v_{50}} = 36\,\mathrm{s}\,.$$

Druhá a čtvrtá část budou ze symetrie trvat stejně dlouho a čas určíme z doby, kterou trvá zrychlit z v_{50} na v_{70}

$$t_2 = t_4 = \frac{v_{70} - v_{50}}{a} \doteq 4{,}63\,\mathrm{s}\,.$$

Měli bychom ověřit, zda vůbec stihneme zrychlit a zpomalit, ale to uděláme nyní tím, že kvůli určení třetího času zjistíme, jakou vzdálenost ještě musíme urazit. Vzdálenost, kterou ujede auto za čas t_2 (a tedy také za t_4) je

$$\Delta s = \frac{1}{2}at_2^2 + v_{50}t_2 = \frac{1}{2}\frac{(v_{70} - v_{50})^2}{a} + v_{50}\frac{v_{70} - v_{50}}{a} = \frac{1}{2}\frac{v_{70}^2 - v_{50}^2}{a} \doteq 77{,}2\,\mathrm{m}\,.$$

Ve třetí fázi pohybu tedy stačí urazit $d - 2\Delta s$ rychlostí v_{70}, tedy

$$t_3 = \frac{d - 2\Delta s}{v_{70}} = \frac{d - \dfrac{v_{70}^2 - v_{50}^2}{a}}{v_{70}} = \frac{d}{v_{70}} - \frac{v_{70}}{a} + \frac{v_{50}^2}{av_{70}} \doteq 17{,}8\,\mathrm{s}\,.$$

Celkový čas cyklu dostáváme jako poměrně krkolomné vyjádření

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{d}{v_{50}} + 2\frac{v_{70} - v_{50}}{a} + \frac{d}{v_{70}} - \frac{v_{70}}{a} + \frac{v_{50}^2}{av_{70}} =$$
$$= d\left(\frac{1}{v_{50}} + \frac{1}{v_{70}}\right) + \frac{1}{a}\left(v_{70} - 2v_{50} + \frac{v_{50}^2}{v_{70}}\right) \doteq 63{,}0\,\mathrm{s}\,.$$

Průměrnou rychlost dostáváme pak jako

$$\bar{v} = \frac{2d}{T} = \frac{2}{\frac{1}{v_{50}} + \frac{1}{v_{70}} + \frac{1}{da}\left(v_{70} - 2v_{50} + \frac{v_{50}^2}{v_{70}}\right)} \doteq 15{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 57{,}1\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}\,.$$

Dodržování rychlosti v jízdě tímto způsobem vede k průměrné rychlosti $57{,}1\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha M.4 ... cesta Blankou... silně pirátská 5 bodů

Představme si, že nějaký pirát silnic s autem o hmotnosti $m = 1\,290\,\mathrm{kg}$ a výkonem motoru $P = 92{,}0\,\mathrm{kW}$ vjede rychlostí $v_0 = 70{,}0\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ do tunelového komplexu Blanka a rozhodne se zrychlovat s maximálním výkonem motoru. Jaké rychlosti by dosáhl, kdyby takto mohl zrychlovat po celou délku komplexu $d = 5\,502\,\mathrm{m}$? Pro jednoduchost zanedbejte výškové změny v tunelu, odporové síly (které ve skutečnosti hrají velkou roli) a předpokládejte, že auto nemá omezenou maximální rychlost. Výsledek uveďte v kilometrech za hodinu.

Karel přemýšlel o zrychlení auta.

Předně nesmíme zapomenout[7] převést do základních jednotek rychlost $v_0 \doteq 19{,}4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Díky tomu, že můžeme zanedbat odporové síly a změnu výšky, můžeme vyjít ze zákona zachování mechanické energie

$$E_\mathrm{k} = Pt = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2Pt}{m}}\,,$$

kde v je rychlost v čase t. Vztah pro rychlost můžeme využít pro integraci, abychom získali závislost polohy v čase. Meze, ve kterých budeme integrovat, budou od času, kdy má auto

[7] Přesně jako se stalo v první verzi vzorového řešení.

rychlost v_0, tedy $t_0 = mv_0^2/(2P) \doteq 2{,}65\,\mathrm{s}$, až po nějaký čas t_1, kdy dosáhneme konce tunelového komplexu ve vzdálenosti d od začátku měření pohybu. Dostaneme tedy

$$d = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\frac{2Pt}{m}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2P}{m}}\left(\sqrt{t_1^3} - \sqrt{t_0^3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2P}{m}}\left(\sqrt{t_1^3} - \sqrt{\left(\frac{mv_0^2}{2P}\right)^3}\right).$$

Hledáme nyní čas t_1, kdy pirát z tunelového komplexu vyjede, takže t_1 vyjádříme z předchozí rovnice jako

$$\sqrt{t_1^3} = \left(\frac{mv_0^2}{2P}\right)^{3/2} + \frac{3}{2}d\sqrt{\frac{m}{2P}},$$

$$t_1 = \left(\left(\frac{mv_0^2}{2P}\right)^{3/2} + \frac{3}{2}d\sqrt{\frac{m}{2P}}\right)^{2/3} \doteq 78{,}5\,\mathrm{s}.$$

Konce tunelu dosáhne pirát zhruba za $78{,}5\,\mathrm{s}$ a jeho rychlost určíme dosazením této hodnoty do původního vztahu pro rychlost v čase, tedy

$$v_1 = \sqrt{\frac{2Pt_1}{m}} = \sqrt{\frac{2P}{m}}\left(\left(\frac{mv_0^2}{2P}\right)^{3/2} + \frac{3}{2}d\sqrt{\frac{m}{2P}}\right)^{1/3} =$$

$$= \sqrt[3]{v_0^3 + \frac{3P}{m}d} \doteq 106\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq 381\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}.$$

Pokud by tedy pirát stále držel nohu na plynu, na auto by nepůsobily odporové síly, výška cesty by byla konstantní a auto by dokázalo zrychlit na takovou rychlost, dosáhl by rychlosti $381\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `https://fykos.cz`
e-mail: `fykos@fykos.cz`

/FYKOS ***@fykosak***

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.